

7.4 二项分布与超几何分布

7.4.1 二项分布

刷基础

1. C 【解析】抛掷一枚骰子,出现的点数可能为1,2,3,4,5,6,其中点数为3的倍数的为3,6,所以抛掷一次质地均匀的骰子,掷出的点数为3的倍数的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,所以抛掷三次,恰好出现两次掷出的点数为3的倍数的概率为 $C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$.
故选 C.

名师点拨 区分 n 重伯努利试验与相互独立事件

- (1) 两事件相互独立是指一个事件的发生与否对另一个事件发生的概率没有影响.
- (2) n 重伯努利试验是指同一个伯努利试验重复做 n 次,各次试验的结果相互独立.
- (3) n 重伯努利试验是相互独立事件的特例,就像对立事件是互斥事件的特例一样,有“恰好”字样的题用 n 重伯努利试验的概率公式计算更简单,就像有“至少”“至多”字样的题用对立事件的概率公式计算更简单一样.

2. C 【解析】由题意可知,每局比赛乙获胜的概率为 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,且各局比赛

结果相互独立,乙战胜甲有两种互斥情况:

第一种:乙连胜2局,则 $P_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$;

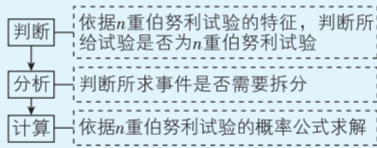
第二种:比赛共进行3局,前2局乙胜1局且第3局乙胜,则

$$P_2 = C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}.$$

所以乙战胜甲的概率为

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{27} = \frac{7}{27}. \text{ 故选 C.}$$

规律方法 n 重伯努利试验概率求步骤



3. C 【解析】因为甲先投篮6次均投中,即已得6分,接下来的4次投篮,若要使最终得分不低于7分,则至少再得1分,甲继续投篮最终得分不低于7分的情况如下:

$$\text{①仅投篮1次并投中: } P_1 = \frac{2}{3} = \frac{18}{27};$$

$$\text{②投篮2次均投中: } P_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} =$$

$$\frac{4}{9} = \frac{12}{27};$$

$$\text{③投篮3次均投中或仅投中2次: } P_3 =$$

悟:加3分或加2分减1分

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{20}{27};$$

$$\text{④投篮4次均投中或仅投中3次: } P_4 =$$

悟:加4分或加3分减1分

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 + C_4^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{16}{27}.$$

显然,当甲同学继续投篮3次时,得分不低于7分的概率最大. 故选 C.

4. C 【解析】由二项分布的概率公式可知 $P(X=n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{27}$,解得 $n=3$,

$$\text{所以 } P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}. \text{ 故选 C.}$$

5. D 【解析】依题意,摸球一次中奖的概率为 $\frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{5}$,则摸球三次仅中奖

$$\text{一次的概率为 } C_3^1 \times \frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}. \text{ 故选 D.}$$

6. C 【解析】小球从起点到第③个格子一共碰到7次钉子,其中向左边滚动5次,向右边滚动2次,且小球每次向左或向右滚动的概率均为 $\frac{1}{2}$,则小球向

右滚动的次数服从二项分布 $B\left(7, \frac{1}{2}\right)$, 所以所求概率为 $P = C_7^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{21}{128}$, 故选 C.

7. B 【解析】由题意可设抽到的消费超过 200 元的人数为 X , 则 $X \sim B\left(20, \frac{2}{5}\right)$, 因此 $P(X=k) = C_{20}^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{20-k}$. 又这 20 人中有 k 人消费超过 200 元的概率最大, 所以

$$\begin{cases} C_{20}^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{20-k} \geq C_{20}^{k-1} \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{21-k}, \\ C_{20}^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{20-k} \geq C_{20}^{k+1} \left(\frac{2}{5}\right)^{k+1} \left(\frac{3}{5}\right)^{19-k}, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \frac{20!}{k!(20-k)!} \cdot \frac{2}{5} \geq \frac{20!}{(k-1)!(21-k)!} \cdot \frac{3}{5}, \\ \frac{20!}{k!(20-k)!} \cdot \frac{3}{5} \geq \frac{20!}{(k+1)!(19-k)!} \cdot \frac{2}{5}, \end{cases}$

解得 $\frac{37}{5} \leq k \leq \frac{42}{5}$, 又 $k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $k = 8$. 故选 B.

快解 由题意可知, 若设消费超过 200 元的人数为 X , 则 $X \sim B\left(20, \frac{2}{5}\right)$, 记 $p_k = P(X=k)$. $(20+1) \times \frac{2}{5} = \frac{42}{5} = 8.4$, 由二项分布的性质可知, 当 $k=8$ 时, p_k 取得最大值, 故选 B.

二级结论 设随机变量 $X \sim B(n, p)$, 记 $p_k = P(X=k)$, 当 $k < (n+1)p$ 时, $p_k > p_{k-1}$, p_k 随 k 值的增加而增加; 当 $k > (n+1)p$ 时, $p_k < p_{k-1}$, p_k 随 k 值的增加而减小. 如果 $(n+1)p$ 为正整数, 当 $k = (n+1)p$ 时, $p_k = p_{k-1}$, 此时这两项概率均为最大值; 如果 $(n+1)p$ 为非整数, 而 k 取 $(n+1)p$ 的整数部分, 则 p_k 是唯一的最大值.

8. A 【解析】因为 $X \sim B(4, p)$, 所以 $E(X) = 4p$, $E(5X-3) = 5E(X) - 3 = 20p - 3 = 5$, 解得 $p = \frac{2}{5}$, 所以 $D(X) = 4 \times \frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{24}{25}$, 则 $D(5X-3) = 5^2 D(X) = 24$. 故选 A.

规律方法 对随机变量 $X \sim B(n, p)$, 有 $E(X) = np$, $D(X) = np(1-p)$.

9. A 【解析】由二项分布的方差公式有 $D(X) = 10p(1-p) = 2.4$, 解得 $p = 0.4$ 或 $p = 0.6$. 而 $P(X=4) < P(X=6)$, 即 $C_{10}^4 p^4 (1-p)^6 < C_{10}^6 p^6 (1-p)^4$, 解得 $p > 0.5$, 所以 $p = 0.6$, 从而 $E(X) = 10p = 6$. 故选 A.

10. $\frac{20}{27}$ 2 【解析】由题意得每名学生被要求用英语回答问题的概率均为 $\frac{2}{3}$, 则 $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$,

由二项分布的概率公式得 $P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{4}{9}$,

$P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}$,

则至少有 2 人用英语回答问题的概率为 $P(X=2) + P(X=3) = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27}$,

由二项分布的期望公式得 $E(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$.

11. 【解】(1) 设事件 A 表示“随机抽取 1 名会员对该店商品质量满意”, 事件 B_1 表示“抽取的会员为本地会员”, 事件 B_2 表示“抽取的会员为外地会员”,

由题意得 $P(B_1) = \frac{7}{10}$, $P(B_2) = \frac{3}{10}$,

$P(A|B_1) = \frac{5}{7}$, $P(A|B_2) = \frac{5}{6}$,

则 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2) \times$

$P(A|B_2) = \frac{7}{10} \times \frac{5}{7} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$.

(2) 从所有会员中随机抽取 3 名, 每名会员满意的概率均为 $\frac{3}{4}$, 且各会员满意与否相互独立,

因此随机变量 $X \sim B\left(3, \frac{3}{4}\right)$, X 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

由二项分布的概率公式 $P(X=k) = C_3^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{3-k}$ ($k = 0, 1, 2, 3$),

可得

$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$,

$P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$,

$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$,

$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

根据二项分布的期望公式 $E(X) =$

np , 代入 $n=3, p=\frac{3}{4}$ 得 $E(X) = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$.

刷易错

★易错点 1 对二项分布理解不透致误

12. B 【解析】对 A: “不放回”摸球, 第二次摸球的概率受第一次摸球结果的影响, 试验不独立, 不服从二项分布, 故 A 错误;

对 B: 射击 5 次可看作 5 次独立重复试验, 每次击中的概率均为 0.8, 符合二项分布的定义, 且 $X \sim B(5, 0.8)$, 故 B 正确;

对 C: “不放回”抽取, 三次抽取的结果不独立, 不服从二项分布, 故 C 错误;

对 D: 二项分布要求每次试验目标事件发生概率为定值, 该选项中, 每道选择题答对的概率均不相同, 因此不服从二项分布, 故 D 错误. 故选 B.

易错警示 判断一个随机变量是否服从二项分布的关键, 是看所述背景是否属于 n 重伯努利试验, 且随机变量是否为在这 n 重伯努利试验中某事件发生的次数, 满足这两点的随机变量才服从二项分布, 否则就不服从二项分布.

★易错点 2 对“至少”与“至多”理解不清致误

13. 0.896 【解析】“至少有 2 天”包括“恰有 2 天”和“恰有 3 天”两种情况, 其概率为 $C_3^2 \times 0.8^2 \times 0.2 + C_3^3 \times 0.8^3 = 0.896$.

所以至少有 2 天预报准确的概率为 0.896.

易错警示 (1) 求解时, 对“至少有 2 天”的含义理解出错, 误认为仅包含“恰有 2 天”, 实际是“恰有 2 天”和“恰有 3 天”两种情况. (2) 在解题过程中, 要明确事件中的“至少有一个发生”“至多有一个发生”“恰有一个发生”“都发生”“都不发生”“不都发生”等词语的意义与差异.

7.4.2 超几何分布

刷基础

1. D 【解析】对于 A, 将一枚硬币连抛 3 次, 正面向上的次数 X 服从二项分布, A 不符合; 对于 B, 虽然是不放回摸球, 但直到摸出黑球为止, 也就是说前面摸出的一定是白球, 最后一次是黑球, 不符合超几何分布的定义, B 不符

合;对于 C,某射手的命中率为 0.8,现对目标射击 1 次,命中目标的次数 X 服从两点分布, **C 不符合**;对于 D,从 7 男 3 女共 10 名学生干部中随机选出 5 名学生干部,选出女生的人数 X 服从超几何分布, **D 符合**. 故选 D.

规律方法 判断随机变量是否服从

超几何分布,可以从两个方面思考:

- ①超几何分布描述的是不放回抽样问题;②随机变量为抽到的某类个体的个数.

- 2. D** 【解析】从袋中任取 4 个球,其中红球的个数 X 服从参数为 $N=12, M=8, n=4$ 的超几何分布,故至多有 3 个红球的概率为 $P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{C_8^4}{C_{12}^4}$. 故选 D.

悟: “至多”“至少”问题常运用正难则反的思想来解决

- 3. B** 【解析】从 10 件产品中,取出 3 件,不同的取法有 $C_{10}^3 = 120$ 种,其中没有一等品的不同取法有 $C_8^3 = 56$ 种,恰有 1 件一等品的不同取法有 $C_2^1 \times C_8^2 = 56$ 种,恰有 2 件一等品的不同取法有 $C_2^2 \times C_8^1 = 8$ 种, **A 错误**;

$$P(X=1) = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}, \text{B 正确};$$

$$P(X=2) = \frac{1}{15}, \text{D 错误};$$

若已知取出的 3 件产品中有一等品,则共有 $56+8=64$ 种取法,故恰有 2 件一等品的概率为 $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$, **C 错误**.

故选 B.

- 4. 【解】**(1) 顾客甲抽奖一次,只有中奖和不中奖两种情况,故 X 的取值也只有 1 和 0 两种情况. 由题可知,

$$P(X=1) = \frac{C_4^1}{C_{10}^1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5},$$

$$\text{则 } P(X=0) = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

因此随机变量 X 的分布列为

X	0	1
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

(2) ①顾客乙中奖可分为互斥的两类情况:所抽取的 2 张奖券中有 1 张中奖和 2 张都中奖,故所求概率 $P = \frac{C_4^1 C_6^1 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$.

②由题可得,随机变量 Y 的所有可能取值为 0, 10, 20, 50, 60,

$$P(Y=0) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3};$$

$$P(Y=10) = \frac{C_3^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5};$$

$$P(Y=20) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15};$$

$$P(Y=50) = \frac{C_1^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15};$$

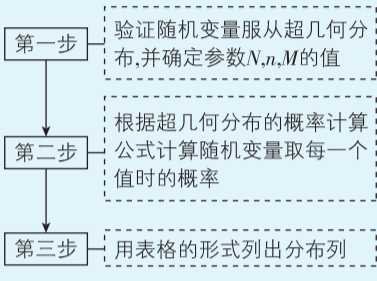
$$P(Y=60) = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}.$$

因此随机变量 Y 的分布列为

Y	0	10	20	50	60
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

链接教材 本题是教材第 80 页练习

第 1 题的同类试题. 求服从超几何分布的随机变量分布列的步骤为



- 5. 【解】**(1) 因为 $N=100$, 所以 X 服从超几何分布, 其中 $N=100, M=20, n=50$,

$$\text{则 } P = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{C_{80}^{50}}{C_{100}^{50}}, E(X) =$$

$$\frac{50 \times 20}{100} = 10.$$

$$(2) \text{由题意可得 } P(X=9) = \frac{C_{20}^9 C_{80}^{41}}{C_N^{50}},$$

$$\text{又 } \begin{cases} N \geq 50, \\ N-20 \geq 41 \end{cases} \Rightarrow N \geq 61,$$

$$\text{当 } N \geq 61 \text{ 时, 设 } f(N) = \frac{C_{20}^9 C_{N-20}^{41}}{C_N^{50}},$$

$$\text{则 } \frac{f(N+1)}{f(N)} = \frac{\frac{C_{20}^9 C_{N+1-20}^{41}}{C_{N+1}^{50}}}{\frac{C_{20}^9 C_{N-20}^{41}}{C_N^{50}}} = \frac{(N-49)(N-19)}{(N-60)(N+1)},$$

$$\text{由 } \frac{f(N+1)}{f(N)} \geq 1, \text{ 解得 } N \leq \frac{991}{9},$$

即当 $61 \leq N \leq 110$ 时, $f(N+1) > f(N)$,

当 $N \geq 111$ 时, $f(N+1) < f(N)$,

所以 $P(X=9)$ 在 $N=111$ 时取得最大值.

- 6. A** 【解析】易知 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,

$$\text{其中 } P(X=0) = \frac{C_8^5}{C_{12}^5} = \frac{7}{99}, P(X=1) =$$

$$\frac{C_4^1 C_8^4}{C_{12}^5} = \frac{35}{99}, P(X=2) = \frac{C_4^2 C_8^3}{C_{12}^5} = \frac{42}{99},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 C_8^2}{C_{12}^5} = \frac{14}{99}, P(X=4) =$$

$$\frac{C_4^4 C_8^1}{C_{12}^5} = \frac{1}{99}, \text{ 故 } E(X) = 0 \times \frac{7}{99} + 1 \times \frac{35}{99} + 2 \times$$

$$\frac{42}{99} + 3 \times \frac{14}{99} + 4 \times \frac{1}{99} = \frac{165}{99} = \frac{5}{3}. \text{ 故选 A.}$$

多种解法 易知 X 服从超几何分布,

由超几何分布的期望公式可得 $E(X) = \frac{nM}{N} = \frac{5 \times 4}{12} = \frac{5}{3}$. 故选 A.

名师点拨 对于超几何分布期望的

求法,既可以按照普通离散型随机变量的期望来求,也可以通过找到超几何分布的参数代入公式来求.

- 7. B** 【解析】由题意可得 $P(X=1) =$

$$\frac{C_n^1 C_{n-2}^2}{C_{n+2}^3} = \frac{1}{5}, \text{ 整理可得 } n^2 + 3n - 28 = 0, \text{ 解得 } n=4 \text{ 或 } n=-7(\text{舍去}).$$

$$\text{因为 } P(X=2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5} = a, P(X=$$

$$3) = \frac{C_4^3 C_0^0}{C_6^3} = \frac{1}{5} = b,$$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2,$$

$$\text{则 } E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 5. \text{ 故选 B.}$$

- 8. A** 【解析】由题意可知, ξ_1, ξ_2 的可能取值均为 0, 1, 2, 3, 4, 5,

且随机变量 ξ_1 服从超几何分布, 随机

变量 ξ_2 服从二项分布,

根据超几何分布的均值、方差公式得

$$n=5, N=20, M=8,$$

$$\text{则 } E(\xi_1) = \frac{nM}{N} = \frac{5 \times 8}{20} = 2,$$

$$D(\xi_1) = \frac{nM}{N} \left(1 - \frac{M}{N} \right) \frac{N-n}{N-1} = \frac{5 \times 8}{20} \times$$

$$\left(1 - \frac{8}{20} \right) \times \frac{20-5}{20-1} = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{15}{19} = \frac{18}{19}.$$

根据二项分布的均值、方差公式得

$$n=5, p = \frac{8}{20} = \frac{2}{5},$$

$$\text{则 } E(\xi_2) = np = 5 \times \frac{2}{5} = 2,$$

$$D(\xi_2) = np(1-p) = 5 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5},$$

$$\text{所以 } E(\xi_1) = E(\xi_2), D(\xi_1) < D(\xi_2).$$

故选 A.

二级结论 若随机变量 X 服从超几

何分布, 则 $E(X) = \frac{nM}{N}, D(X) =$

$$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} = E(X) \cdot$$

$$\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)}.$$

- 9. 【解】**(1) 由题意, 从 6 首古诗中随机抽取 3 首, 小明可背诵其中 4 首, $\therefore$ 所

$$\text{求概率 } P = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{6 \times 2}{20} = \frac{3}{5}.$$

(2) 由题意, 随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3,

$$\therefore P(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{4 \times 1}{20} = \frac{1}{5}, P(X=$$

$$2) = \frac{3}{5}, P(X=3) = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = \frac{4 \times 1}{20} = \frac{1}{5},$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\therefore \text{期望 } E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2,$$

$$\text{方差 } D(X) = (1-2)^2 \times \frac{1}{5} + (2-2)^2 \times$$

$$\frac{3}{5} + (3-2)^2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

(3) 设小华能背诵的古诗数量为 Y , 由题意, 小华每首古诗能背诵的概率均为 $\frac{2}{3}$, 且各首古诗的背诵情况相互独立, 故 $Y \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$.

$$\therefore E(Y) = 3 \times \frac{2}{3} = 2, D(Y) = 3 \times \frac{2}{3} \times$$

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore E(X) = E(Y), D(X) = \frac{2}{5} < \frac{2}{3} =$$

$D(Y)$, 说明两人平均背诵数量相同, 但小明发挥更稳定,

$\therefore$ 选小明同学代表班级参加学校总决赛更合适.

刷易错

★易错点 混淆二项分布与超几何分布致错

10. 【解】(1) 若每次抽取后都放回, 则每次抽到黑球的概率均为 $\frac{2}{8+2} = \frac{1}{5}$,

而 3 次取球可以看成 3 次独立重复试验, 因此 $X \sim B\left(3, \frac{1}{5}\right)$,

$$\text{所以 } P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}, P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{12}{125},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{125},$$

因此 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

(2) 由题意, Y 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$\text{则 } P(Y=0) = \frac{C_2^0 C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}, P(Y=1) =$$

$$\frac{C_2^1 C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}, P(Y=2) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{15},$$

因此, Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$\text{所以 } E(Y) = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times$$

$$\frac{1}{15} = \frac{3}{5},$$

$$D(Y) = \left(0 - \frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{7}{15} + \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 \times$$

$$\frac{7}{15} + \left(2 - \frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{1}{15} = \frac{28}{75}.$$

易错警示 超几何分布和二项分布的区别与联系

- (1) 超几何分布需要知道总体的容量 N , 而二项分布不需要;
- (2) 超几何分布是“不放回”抽取, 而二项分布是“有放回”抽取(独立重复);
- (3) 当总体的容量非常大, 样本的容量较小时, 超几何分布近似于二项分布.

第 7.4 节综合训练

刷能力

1. B 【解析】因为 $X \sim B(n, p)$, 所以

$$E(X) = np = 1, D(X) = np(1-p) = \frac{3}{4},$$

$$\text{解得 } p = \frac{1}{4}, n = 4, \text{ 所以 } P(X=3) =$$

$$C_4^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{64}. \text{ 故选 B.}$$

2. D 【解析】设抽取到高二年级学生的人数为 X , 则 X 所有可能的取值为 1, 2, 3,

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{C_6^1 C_2^2}{C_8^3} = \frac{3}{28}, P(X=2) =$$

$$\frac{C_6^2 C_2^1}{C_8^3} = \frac{15}{28}, P(X=3) = \frac{C_6^3 C_2^0}{C_8^3} = \frac{5}{14},$$

$$\therefore E(X) = 1 \times \frac{3}{28} + 2 \times \frac{15}{28} + 3 \times \frac{5}{14} = \frac{9}{4}.$$

故选 D.

3. D 【解析】甲最终以 4:1 获胜, 说明甲在五局比赛中赢了四局, 输了一局, 且输掉的这局为前四局中的一局, 故

$$\text{所求概率为 } C_4^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{8}{243}.$$

故选 D.

4. C 【解析】因为函数 $f(x) = 2x^2 + 2\sqrt{10}x + X$ 有零点, 所以关于 x 的方程 $2x^2 + 2\sqrt{10}x + X = 0$ 的判别式 $\Delta \geq 0$, 即 $\Delta = (2\sqrt{10})^2 - 4 \times 2X \geq 0$.

化简得 $40 - 8X \geq 0$, 解得 $X \leq 5$.

根据二项分布的概率公式可知,

$$P(X \leq 5) = 1 - P(X=6) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 =$$

$$\frac{63}{64}. \text{ 故选 C.}$$

5. A 【解析】由题意知, 质点向左或向右移动 1 个单位长度的概率均为 $\frac{1}{2}$, 设质点向右移动的次数为 X , 则 $X \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right)$.

若 $\xi_6 = 0$, 则移动 6 次后质点一共向左移动 3 次, 向右移动 3 次,

点悟: 最后落在哪个点上, 取决于这 6 次中向右、向左各移动了几次

$$\text{所以 } P(\xi_6 = 0) = P(X=3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

$$\text{若 } \xi_6 = 2, \text{ 则移动 6 次后质点一共向右移动 4 次, 向左移动 2 次, 所以 } P(\xi_6 = 2) = P(X=4) = C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

$$\text{故 } \frac{P(\xi_6 = 0)}{P(\xi_6 = 2)} = \frac{C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^6}{C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6} = \frac{4}{3}. \text{ 故选 A.}$$

6. C 【解析】设从五行中随机任取两行为

“生”的事件为 A , 则 $P(A) = \frac{5}{C_5^2} = \frac{1}{2}$. 依

题意, 随机变量 X 服从二项分布, 即 $X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$, 故 $E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$,

$$D(X) = 10 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}, \text{ 故选 C.}$$

7. $\frac{923}{980} \frac{9}{5}$ 【解析】因为事件 $X \geq 1$ 与

事件 $X=0$ 互为对立事件, 而 $P(X=0) = \frac{C_{30}^3}{C_{980}^3} = \frac{57}{980}$, 所以 $P(X \geq 1) = 1 -$

$$P(X=0) = 1 - \frac{57}{980} = \frac{923}{980}.$$

敲黑板: 互为对立事件的两个事件的概率之和为 1

因为随机变量 X 服从超几何分布, 所以 $E(X) = 3 \times \frac{30}{50} = \frac{9}{5}$.

8. $\frac{9}{25}$ 【解析】由已知可得 $x_1 = 3.1, x_2 =$

$$3.14, x_3 = 3.142, x_4 = 3.1416, x_5 =$$

3. 141 59.

则 $x_1 < x_5, x_2 < x_5, x_3 > x_5, x_4 > x_5$.

避坑: 四舍五入后原数值的大小改变, 不能想当然地认为小数点后保留的位数越多数值越大

从这 5 个近似值中任取 3 个, 记这 3 个值中大于 x_5 的个数为 X , 则 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 且 X 服从超几何分布,

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_2^0 \cdot C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}, P(X=$$

$$1) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}, P(X=2) =$$

$$\frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5},$$

$$D(X) = \left(0 - \frac{6}{5}\right)^2 \times \frac{1}{10} + \left(1 - \frac{6}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{25}.$$

9. $\frac{8}{3}$ 66 或 67 【解析】设单次抛掷骰子的得分为 Y ,

当 $Y=1$ 时, 对应点数为 2, 3, 4, 5, 则

$$P(Y=1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

当 $Y=2$ 时, 对应点数为 1, 6, 则 $P(Y=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$

单次得分期望为 $E(Y) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times$

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

故抛掷 2 次骰子总得分 X 的期望为

$$E(X) = 2E(Y) = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

设 50 次中, 得 2 分的次数为 k ($0 \leq k \leq 50, k$ 为整数),

则得 1 分的次数为 $50-k$, 总得分 $n = (50-k) \times 1 + 2k = 50+k,$

于是 $k = n-50$, 且 $k \sim B\left(50, \frac{1}{3}\right).$

概率 $P_n = P(k=n-50),$

则要求 P_n 的最大值, 即求二项分布

$k \sim B\left(50, \frac{1}{3}\right)$ 的最大值,

$$\text{由 } (50+1) \times \frac{1}{3} = 51 \times \frac{1}{3} = 17, (50+1) \times$$

$$\frac{1}{3} - 1 = 51 \times \frac{1}{3} - 1 = 16 \text{ 为整数,}$$

故最大值在 $k=16$ 和 $k=17$ 处取得, 对应 $n=66$ 和 $n=67$.

即当 P_n 取最大值时 n 的值为 66 或 67.

10. 【解】(1) 设该选手初赛中考对题目的数量为 X , 则 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}, P(X=1) =$$

$$\frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}, P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times$$

$$\frac{1}{30} = \frac{6}{5}.$$

(2) 甲在决赛中总得分大于 10 分的情况有以下三种: 得 15 分 (抢到 3 次且答对 2 次, 答错 1 次), 得 20 分 (抢到 2 次且答对 2 次, 有 1 次没抢到或未参与抢答), 得 30 分 (抢到 3 次且答对 3 次).

记甲一轮中抢到题目且答对为事件 A , 则 $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$

记甲一轮中抢到题目且答错的概率为事件 B , 则 $P(B) = \frac{1}{2} \times$

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6},$$

记甲一轮中未参与抢答或未抢到题目为事件 C , 则 $P(C) = \frac{1}{2}.$

则甲得 15 分的概率 $P_1 = C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{18}, \text{甲得 20 分的概率 } P_2 = C_3^2 \times$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$$\text{甲得 30 分的概率 } P_3 = C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

所以甲在决赛中总得分大于 10 分的概

$$\text{率 } P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}.$$

11. 【解】(1) 5 位二进制数形如 $1a_4a_3a_2a_1$, 由于每个 a_i ($i=1, 2, 3, 4$) 有 0, 1 两个取值,

所以全体 5 位二进制数总数为 $2^4 = 16$, 其中满足 $\xi > 2$ 的二进制数有 5 个,

分别为 $\overline{11000}, \overline{10100}, \overline{10010}, \overline{10001},$

$$\overline{10000}, \text{所以 } P(\xi > 2) = \frac{5}{16}.$$

(2) 2 026 位二进制数首位数码为 1, 数码 0 独立且等可能出现在剩下的 2 025 个数位上,

每个数位出现 0 的概率为 $\frac{1}{2}$, 所以 0

出现的次数服从二项分布, 即 $\xi \sim$

$$B\left(2\,025, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{所以 } p_k = C_{2\,025}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2\,025-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$C_{2\,025}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2\,025},$$

$$\text{所以 } kp_k = k C_{2\,025}^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2\,025}.$$

记 $f(k) = k C_{2\,025}^k$, 则 kp_k 最大等价于 $f(k)$ 最大,

$$\frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{(k+1) C_{2\,025}^{k+1}}{k C_{2\,025}^k} = \frac{k+1}{k}.$$

$$\frac{2\,025!}{(k+1)! (2\,024-k)!}.$$

$$\frac{k! (2\,025-k)!}{2\,025!} = \frac{2\,025-k}{k},$$

所以 $f(k+1) > f(k) \Leftrightarrow 2k < 2\,025 \Leftrightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 1\,012$, 此时 $f(k)$ 单调递增, $f(k+1) < f(k) \Leftrightarrow 2k > 2\,025 \Leftrightarrow k = 1\,013, 1\,014, \dots, 2\,025$, 此时 $f(k)$ 单调递减,

所以 $f(1\,013)$ 为最大值.

综上, 当 $k \cdot p_k$ 取得最大值时 k 的值为 1 013.

刷素养

12. $\frac{157}{4\,096}$ 【解析】设比赛终止后, 棋手

获胜的局数为 x .

(1) 6 局比赛后棋手挑战成功, 则最后 1 局棋手胜.

①若 $x=1$, 则前 5 局均为平局, 只有 1 种情形; ②若 $x=2$, 则在前 5 局中除平局外出现 1 胜 1 负, 且为“负胜”的顺序, 共有 C_5^2 种情形; ③若 $x=3$, 则在前 5 局中除平局外出现 2 胜 2 负, 且为“负胜负胜”的顺序, 共有 C_5^4 种情形.

所以 6 局比赛后, 棋手挑战成功的概

$$\text{率 } P_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^6 + C_5^2 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 +$$

$$C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{41}{4^6}.$$

(2) 6 局比赛后棋手挑战失败, 则最后 1 局棋手负.

①若 $x=0$, 则在前 5 局中除平局外出现 1 负, 且负局可以在任意位置, 有 C_5^1 种情形; ②若 $x=1$, 则在前 5 局中除平局外出现 2 负 1 胜, 且为“负胜负”的顺序, 有 C_5^3 种情形; ③若 $x=2$, 则在前 5 局中出现 3 负 2 胜, 且为“负负负胜胜”的顺序, 只有 1 种情形.

所以 6 局比赛后, 棋手挑战失败的概

$$\text{率 } P_2 = C_5^1 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{116}{4^6}.$$

综上, 6 局后比赛终止的概率 $P = P_1 +$

$$P_2 = \frac{41}{4^6} + \frac{116}{4^6} = \frac{157}{4\,096}.$$

7.5 正态分布

刷基础

1. A 【解析】∵ 随机变量 X 服从正态分布 $N(a, 4)$, ∴ $P(X > a) = 0.5$. 由 $P(X > 1) = 0.5$, 可知 $a = 1$. 故选 A.

2. C 【解析】由题图可知 $\mu_1 = 30, \mu_2 = 34$, 则 $\mu_1 < \mu_2$, 即 $E(X) < E(Y)$, 所以 A 错误;

根据正态曲线的性质, σ 越大正态曲线越矮胖, σ 越小正态曲线越高瘦, 则 $\sigma_1 > \sigma_2$, 即 $D(X) > D(Y)$, 所以 B 错误; 由题图可知, $P(X \leq 38) < P(Y \leq 38)$, 所以 C 正确;

由题图可知, $P(X \leq 34) > \frac{1}{2} = P(Y \leq 34)$, 所以 D 错误. 故选 C.

链接教材 本题是教材第 86 页例题的变式与延伸, 考查正态曲线的性质.

对正态分布, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$.

(1) 比较均值: 看对称轴位置, 对称轴在右侧的, 均值越大;

(2) 比较方差: 看曲线“胖瘦”, 曲线越高瘦, 数据越集中, 方差越小; 曲线越矮胖, 数据越分散, 方差越大.

(3) 比较累积概率: 看面积, 通常方差小的分布取到大于某个特别大的值的概率更小 (不易取极端值), 但小于这个特别大的值的概率反而更大 (因为集中).

3. C 【解析】因为随机变量 ξ 服从正态分布 $N(3, \sigma^2)$,

所以正态分布的均值 $\mu = 3$, 则正态曲线关于直线 $x = 3$ 对称,

由对称性可得 $P(\xi > 5) = P(\xi < 1) = 0.1$,

所以 $P(\xi < 5) = 1 - P(\xi \geq 5) = 1 - P(\xi > 5) = 1 - 0.1 = 0.9$.

故选 C.

归纳总结 正态密度曲线的特点

- (1) 曲线关于直线 $x = \mu$ 对称;
- (2) 曲线与 x 轴围成的面积为 1, 直线 $x = \mu$ 两侧面积分别为 0.5;
- (3) 正态分布在 3 个特殊区间的概率值:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827,$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545,$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973.$$

4. A 【解析】∵ 随机变量 X 服从正态分布 $N\left(6, \frac{1}{2}\right)$, 且满足 $P(X < a + 4) =$

$$P(X > 5),$$

$$\therefore a + 4 + 5 = 12, \text{解得 } a = 3. \text{ 故选 A.}$$

点悟 由正态曲线的对称性可知 $a + 4 + 5 = 2\mu$.

5. BC 【解析】随机变量 $X \sim N(\mu, 3^2)$, 且 $P(X > 3) = P(X < 1)$,

又正态曲线关于直线 $x = \mu$ 对称, 故

$$\mu = \frac{3+1}{2} = 2.$$

对于选项 B: 正态分布的期望 $E(X) = \mu = 2$, 故 B 正确.

对于选项 D: 正态分布的方差 $D(X) = \sigma^2 = 3^2 = 9$, 故 D 错误.

对于选项 C: ∵ 正态曲线关于直线 $x = 2$ 对称, 对称轴左侧的概率为 0.5, ∴ $P(X \leq 2) = 0.5$, 故 C 正确.

对于选项 A: ∵ 0 与 4 关于直线 $x = 2$ 对称, ∴ $P(X < 0) = P(X > 4)$,

$$\therefore P(0 \leq X \leq 4) = 0.4,$$

$$\therefore P(X < 0) + P(X > 4) = 1 - P(0 \leq X \leq 4) = 0.6,$$

$$\therefore P(X \geq 4) = P(X > 4) = \frac{0.6}{2} = 0.3 \neq 0.2, \text{ 故 A 错误.}$$

6. 455 【解析】由题意知, $\mu = 200, \sigma = 4$. 这批零件中长度超过 208 mm 的概率

$$\text{为 } P(X > \mu + 2\sigma) \approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.9545) =$$

$$0.02275,$$

所以这批零件中长度超过 208 mm 的个数约为 $20\,000 \times 0.02275 = 455$.

7. 【解】(1) 由题意, 该仪器的合格率 $p = 0.8 + 0.2 \times 0.5 = 0.9$,

所以随机变量 $\xi \sim B(3, 0.9)$, 故其分布列为 $P(\xi = k) = C_3^k \cdot 0.9^k \cdot (1 - 0.9)^{3-k} (k = 0, 1, 2, 3)$, 即

ξ	0	1	2	3
P	0.001	0.027	0.243	0.729

数学期望 $E(\xi) = 3 \times 0.9 = 2.7$.

(2) 由(1)知, 随机变量 $Y \sim B(100, 0.9)$, 此时 $np = 100 \times 0.9 = 90 > 5, n(1-p) = 100 \times 0.1 = 10 > 5$,

所以可以认为随机变量 Y 近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,

$$\text{其中 } \mu = 100 \times 0.9 = 90, \sigma = \sqrt{100 \times 0.9 \times (1 - 0.9)} = 3,$$

所以 $Y \sim N(90, 3^2)$.

$$\text{所以 } P(84 \leq Y \leq 99) = P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = \frac{1}{2} [P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) +$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma)] \approx \frac{1}{2} \times (0.997 + 0.955) = 0.976.$$

所以合格的件数 $Y \in [84, 99]$ 的概率约为 0.976.

刷能力

1. D 【解析】随机变量 X 服从正态分布 $N(6, \sigma^2)$, 所以正态曲线关于直线 $x = 6$ 对称, 所以 $P(X \geq 9) = P(X \leq 3) = 0.4$, 所以 $P(X \leq 9) = 1 - P(X \geq 9) = 0.6$. 故选 D.

2. D 【解析】由正态曲线的性质知 $D(\xi) = 4$, 故 A 错误.

由正态曲线的对称轴方程为 $x = 1$, 可知 $P(\xi \leq 0) = P(\xi \geq 2) > P(\xi \geq 3)$, 故 B 错误.

$P(\xi \geq 3) = P(\xi \leq -1) < P(\xi \leq 0)$, 故 C 错误.

由正态曲线的对称性易知 $P(\xi \leq 0) = P(\xi \geq 2) = \frac{1}{2} [1 - P(0 \leq \xi \leq 2)]$, 故 D 正确.

故选 D.

3. C 【解析】由正态分布知, 数学成绩在 $[70, 110]$ 的概率为 $2 \times (0.5 - 0.2) = 0.6$, 所以随机抽取的 10 名学生中数学成绩在 $[70, 110]$ 的人数服从二项分布 $B(10, 0.6)$, 所以所求方差为 $10 \times 0.6 \times (1 - 0.6) = 2.4$, 故选 C.

4. BCD 【解析】由题意得 $E(\xi_1) = 30, D(\xi_2) = 4$, 所以 $E[\xi_1 - D(\xi_2)] = E(\xi_1 - 4) = E(\xi_1) - 4 = 26$, 故 A 错误;

$$f_1(30) = P(\xi_1 \leq 30) = \frac{1}{2} = f_2(34) =$$

$$P(\xi_2 \leq 34) > P(\xi_2 \leq 30) = f_2(30), \text{ 故 B 正确;}$$

$$f_1(x) + f_1(60 - x) = P(\xi_1 \leq x) + P(\xi_1 \leq 60 - x) = P(\xi_1 \leq x) + P(\xi_1 > x) = 1, \text{ 故 C 正确;}$$

$$f_1(27) = P(\xi_1 \leq 27) = P\left(\xi_1 \leq 30 - \frac{1}{2} \times 6\right) = P\left(\xi_2 \leq 34 - \frac{1}{2} \times 2\right) = f_2(33), \text{ 故 D 正确.}$$

故选 BCD.

5. 840 【解析】∵ $X \sim N(5.2, \sigma^2)$, 且 $P(X > 5.28) = 0.08$,

∴ $P(5.12 \leq X \leq 5.28) = 1 - 2P(X > 5.28) = 1 - 2 \times 0.08 = 0.84$, ∴ 估计该企业生产的 1 000 个该种零件中合格品的个数为 $1\,000 \times 0.84 = 840$.

规律方法 对于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 已知直线 $x = \mu$ 是正态曲线的对称轴, 因此解决正态分布问题的关键是利用对称轴 $x = \mu$ 确定所求概率对应的随机变量的区间与已知概率对应的随机变量的区间的关系, 必要时可借助图象判断.

6. 【解】(1) 由题中频率分布直方图得
 $10 \times (0.004 + 0.008 + 0.012 + a + 0.026 + 0.032) = 1$, 解得 $a = 0.018$.
- (2) 由题中频率分布直方图, 可知前 4 组的频率之和为 $10 \times (0.004 + 0.008 + 0.012 + 0.026) = 0.5$, 所以估计这 600 名学生成绩的中位数为 80 分.
- (3) ①由题中频率分布直方图, 可利用区间中点值和频率来估计平均数 μ , 即
 $\mu = 45 \times 0.04 + 55 \times 0.08 + 65 \times 0.12 + 75 \times 0.26 + 85 \times 0.32 + 95 \times 0.18 = 77.8$,
 所以 $X \sim N(77.8, 9^2)$,
 则 $P(X > 86.8) = P(X > \mu + \sigma) =$

$\frac{1 - P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)}{2} \approx \frac{1 - 0.6827}{2} = 0.15865$,
 题中是把 2.8 万人看成一个总体, 这里面每个人的成绩服从正态分布, 为了便于计算, 我们可以把判断每名参赛学生的成绩看成伯努利试验,
 ② **点悟:** 总体中的每个个体的得分仅有超过 86.8 分和不超 86.8 分两种情况
 每个人的成绩超过 86.8 分的概率约为 0.15865.
 所以 $X \sim B(28\,000, 0.15865)$, 此时
 ③ **敲黑板:** 不同参赛学生间的得分可以视为“相互独立”

$E(X) = 28\,000 \times 0.15865 \approx 4\,442$,
 即估计竞赛成绩超过 86.8 分的人数约为 4 442.
 ②由①得 $X \sim N(77.8, 9^2)$, 则 $P(X > 77.8) = \frac{1}{2}$,
 由于是从所有参赛的学生中随机抽取 10 人,
 则随机变量 $Y \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$,
 所以 $E(Y) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$, $D(Y) = 10 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$.

专题 2 概率与统计、计数原理的综合

刷难关

1. C 【解析】设“甲、乙相邻”为事件 A, “教师不站在两端”为事件 B, 则“教师不站在两端且甲、乙相邻”为事件 AB, 因为两端不能站教师, 教师只能从中间 3 个位置选 1 个, 剩余 4 名学生全排列, 所以 $n(B) = C_3^1 \cdot A_4^4 = 3 \times 24 = 72$.
 将甲、乙看作一个整体, 内部排列有 $A_2^2 = 2$ 种, 此时共 4 个“元素”(甲和乙的整体、丙、丁、教师),
 要求教师不站在两端, 教师只能从 4 个元素排列的中间 2 个位置选 1 个, 剩余 3 个元素全排列, 所以 $n(AB) = C_2^1 \cdot A_3^3 \cdot A_2^2 = 2 \times 6 \times 2 = 24$,
 根据条件概率公式得, $P(A|B) = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$. 故选 C.
2. ACD 【解析】对于 A, 经过连续 2 次移动, 要回到原位, 只需这两次的方向相反即可, 如一前一后, 一左一右, 这是有可能的, 故 A 正确;
 对于 B, 设向前、向后、向左、向右移动的步数为 m, n, p, q , 要回到初始位置 A, 则必有 $\begin{cases} m=n, \\ p=q, \end{cases}$
 故移动的总步数为 $m+n+p+q = 2(m+p)$, 必为偶数, 不可能为奇数 3, 故 B 错误;
 对于 C, 要使连续移动 4 次, 最终位置落在网格边界上,
 则必须是连续 4 次向同一方向移动, 而每一次向 4 个方向移动的概率均为 $\frac{1}{4}$, 所以落在边界上的概率为 $P = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{64}$, 故 C 正确;
 对于 D, 由 B 的分析可知, 要使连续移动 4 次, 恰好回到初始位置 A, 则必有

$m+p=2$,
 即①: 向前 2 次, 向后 2 次, 此时 $P = C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{128}$;
 ②向左 2 次, 向右 2 次, 此时 $P = C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{128}$;
 ③向前 1 次, 向后 1 次, 向左 1 次, 向右 1 次, 此时 $P = C_4^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot C_3^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot C_2^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$.
 所以经过连续移动 4 次, 恰好回到初始位置 A 的概率为 $P = \frac{3}{128} + \frac{3}{128} + \frac{3}{32} = \frac{9}{64}$, 故 D 正确.
 故选 ACD.

3. $\frac{243}{784}$ 【解析】因为 $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, 且 $a+b+c=9$,
 所以方程 $a+b+c=9$ 的所有解的情况为:
 $(1, 1, 7)$, 共 $A_3^1 = 3$ 个;
 $(1, 2, 6)$, 共 $A_3^3 = 6$ 个;
 $(1, 3, 5)$, 共 $A_3^3 = 6$ 个;
 $(1, 4, 4)$, 共 $A_3^1 = 3$ 个;
 $(2, 2, 5)$, 共 $A_3^1 = 3$ 个;
 $(2, 3, 4)$, 共 $A_3^3 = 6$ 个;
 $(3, 3, 3)$, 共 1 个.
 综上, 共有 $3+6+6+3+3+6+1 = 28$ 种情况.
 随机变量 X 为 a, b, c 中的最小值, 所以 X 可能的取值为 1, 2, 3,
 所以 $P(X=1) = \frac{3+6+6+3}{28} = \frac{9}{14}$,
 $P(X=2) = \frac{3+6}{28} = \frac{9}{28}$,

$P(X=3) = \frac{1}{28}$,
 所以 $E(X) = 1 \times \frac{9}{14} + 2 \times \frac{9}{28} + 3 \times \frac{1}{28} = \frac{39}{28}$,
 $E(X^2) = 1 \times \frac{9}{14} + 4 \times \frac{9}{28} + 9 \times \frac{1}{28} = \frac{63}{28} = \frac{9}{4}$,
 所以 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{9}{4} - \frac{39^2}{28^2} = \frac{243}{784}$.

4. 【解】(1) 因为抽样比为 $\frac{9}{20+30+40} = \frac{1}{10}$, 所以成绩在 $[40, 50)$ 内的抽取 $20 \times \frac{1}{10} = 2$ (人), 成绩在 $[50, 60)$ 内的抽取 $30 \times \frac{1}{10} = 3$ (人), 成绩在 $[60, 70)$ 内的抽取 $40 \times \frac{1}{10} = 4$ (人).
 设事件 A: 这 4 人中至少有 2 人来自前 2 组, 则 $P(A) = 1 - \frac{C_4^4 + C_4^3 C_1^1}{C_9^4} = \frac{5}{6}$.
 (2) (i) $\mu = \bar{x} = 45 \times \frac{20}{200} + 55 \times \frac{30}{200} + 65 \times \frac{40}{200} + 75 \times \frac{60}{200} + 85 \times \frac{30}{200} + 95 \times \frac{20}{200} = 70.5$,
 所以 $\mu - \sigma = 56.19$, $\mu + \sigma = 84.81$, $\mu + 2\sigma = 99.12$, $\mu - 2\sigma = 41.88$.
 所以 $P(56.19 < Z \leq 99.12) = P(\mu - \sigma < Z \leq \mu + 2\sigma) = \frac{1}{2} P(\mu - 2\sigma \leq Z \leq \mu + 2\sigma) + \frac{1}{2} P(\mu - \sigma \leq Z \leq \mu + \sigma) \approx 0.8186$.
 故估计这些学生这次化学成绩在区间 $(56.19, 99.12]$ 内的概率为 0.8186.
 (ii) 对于方案 2: 设每位学生所获赠学习视频小时数为 Y , 则 $Y = 40, 30, 10$.

$$P(Z \leq 56.19) = P(Z \leq \mu - \sigma) \approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.6827) = 0.15865,$$

$$P(56.19 < Z \leq 84.81) = P(\mu - \sigma < Z \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827,$$

$$\sigma) \approx 0.6827,$$

$$P(Z > 84.81) = P(Z > \mu + \sigma) \approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.6827) = 0.15865,$$

则 $E(Y) = 40 \times 0.15865 + 30 \times 0.6827 + 10 \times 0.15865 = 28.4135 \approx 28 > 25$, 所以方案 2 该平台赠送的学习视频总时长更多.

专题 3 概率与数列的综合

刷难关

1. B 【解析】由 $S_7 = -3 = 2 - 5$ 说明有 2 次摸到白球, 5 次摸到红球. 由于每次摸球的结果之间没有影响, 故每次摸到红球的概率是 $\frac{2}{3}$, 摸到白球的概率是 $\frac{1}{3}$. 所以共摸球 7 次, 只有 2 次摸到白球的概率是 $C_7^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$.

2. ACD 【解析】 $\because a_n + a_{n+1} = (-1)^{n+1}$, $\therefore \frac{a_n}{(-1)^{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}} = 1$, 即 $\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{(-1)^n}$, 又 $\frac{a_1}{-1} = 3$, $\therefore$ 数列 $\left\{\frac{a_n}{(-1)^n}\right\}$ 是首项为

3, 公差为 1 的等差数列, 即 $\frac{a_n}{(-1)^n} = n + 2$, $\therefore a_n = (-1)^n(n+2)$,

对于选项 A: $a_{10} = (-1)^{10} \times (10+2) = 12$, 故 A 正确;

对于选项 B: $S_{12} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{11} + a_{12}) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$, 故 B 错误;

对于选项 C: 显然 n 为奇数时, a_n 为奇数, n 为偶数时, a_n 为偶数, 若要满足 $\{a_n\}$ 的两项之和为奇数, 则应从 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项中各取一个, 则

$$P_n = \frac{C_n^1 \cdot C_{2n}^1}{C_{2n}^2} = \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2}, \text{故 C 正确};$$

对于选项 D: 当 $n=1$ 时, $T_1 = P_1 = 1$, 满足 $T_n \leq \frac{n}{2n-1}$; 当 $n \geq 2$ 时, $P_n = \frac{n}{2n-1} < \frac{n}{2n-2} = \frac{n}{2(n-1)}$,

$$\text{则 } T_n = P_1 P_2 \cdots P_n \leq 1 \times \frac{2}{2 \times 1} \times \frac{3}{2 \times 2} \times \frac{4}{2 \times 3} \times \cdots \times \frac{n}{2(n-1)} = \frac{n}{2^{n-1}}, \text{故 D 正确. 故选 ACD.}$$

3. ABD 【解析】由题意可知, 要使得 n 次传球后球在甲手中, 则第 $(n-1)$ 次传球后球必定不在甲手中,

$$\text{所以 } P_n = \frac{1}{2}(1 - P_{n-1}), n \geq 2,$$

$$\text{即 } P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_{n-1} - \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{因为 } P_1 = 0, \text{ 所以 } P_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}, \text{ 所以}$$

$$P_n - \frac{1}{3} \neq 0, \text{ 所以 } \frac{P_n - \frac{1}{3}}{P_{n-1} - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2},$$

则数列 $\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 故 B 正确;

$$\text{所以 } P_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ 即}$$

$$P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{对于 A, } P_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ 故 A 正确};$$

$$\text{对于 C, 由 } P_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}, \text{ 可得 } P_1 = \frac{2}{3} \neq 0, \text{ 故 C 错误};$$

对于 D, 若第 4 次传球后球在甲手中, 则第 3 次传球后球必不在甲手中, 设甲、乙、丙分别对应 a, b, c ,

则不同的传球方式有: ① $a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow$

② $a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow a$, ③ $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow$

$b \rightarrow a$, ④ $a \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow a$, ⑤ $a \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow a$, ⑥ $a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$, 故共有 6 种情况, 故 D 正确. 故选 ABD.

规律方法 利用构造法求数列通项公式

(1) 形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ (其中 p, q 均为常数且 $p \neq 0, 1$) 型的递推公式

设 $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$, 展开移项整理得 $a_{n+1} = pa_n + (p-1)\lambda$, 与 $a_{n+1} = pa_n + q$

比较系数 (待定系数法) 得 $\lambda = \frac{q}{p-1} \Rightarrow$

$$a_{n+1} + \frac{q}{p-1} = p\left(a_n + \frac{q}{p-1}\right) \Rightarrow a_n + \frac{q}{p-1} =$$

$$p\left(a_{n-1} + \frac{q}{p-1}\right) (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2), \text{ 即}$$

$\left\{a_n + \frac{q}{p-1}\right\}$ 构成以 $a_1 + \frac{q}{p-1}$ 为首项,

p 为公比的等比数列. 利用等比数列的通项公式求出 $\left\{a_n + \frac{q}{p-1}\right\}$ 的通项公式后, 整理可得 a_n .

(2) 形如 $a_{n+1} = pa_n + q^n$ (其中 $p \neq 0, 1$ 且 $q \neq 0, 1$) 型的递推公式

要先在原递推公式两边同时除以

q^{n+1} , 得 $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} + \frac{1}{q}$, 引入辅助

数列 $\{b_n\}$ (其中 $b_n = \frac{a_n}{q^n}$), 得 $b_{n+1} =$

$\frac{p}{q}b_n + \frac{1}{q}$, 再应用 (1) 的构造法解决.

4. ABD

思路导引 根据题意, 由全概率公式

可得 p_{n+1} 和 p_n 的关系, 代入即可求出 p_2 , 判断 A; 若第 n 次分类正确, 则第 $n+2$ 次分类正确包含两种情况: 第 $n+1$ 次分类正确且第 $n+2$ 次分类正确, 第 $n+1$ 次分类错误且第 $n+2$ 次分类正确, 利用条件概率求出 $P(A_{n+2}|A_n)$, 即可判断 B; 根据 p_{n+1} 和 p_n 的关系, 利用构造法即可判断 C; 结合 C 即可得到数列 $\{p_n\}$ 的通项公式, 再进行分组求和即可.

【解析】由已知, 得第 $(n+1)$ 次分类正确的概率为 $p_{n+1} = P(A_{n+1}|A_n)p_n + P(A_{n+1}|\bar{A}_n)(1-p_n) = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$.

$$\text{对于 A, } p_2 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}, \text{ 故 A 正确};$$

$$\text{对于 B, } P(A_{n+2}|A_n) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_{n+2}|A_{n+1}) + P(\bar{A}_{n+1}|\bar{A}_n)P(A_{n+2}|\bar{A}_{n+1}) = \frac{2}{3} \times$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}, \text{ 故 B 正确};$$

$$\text{对于 C, 由 } p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}, \text{ 得 } p_{n+1} -$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right), \text{ 又 } p_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{4}, \text{ 所以 } \left\{p_n - \frac{1}{2}\right\} \text{ 是首项为 } \frac{1}{4}, \text{ 公比}$$

$$\text{为 } \frac{1}{3} \text{ 的等比数列, 且 } p_2 = \frac{7}{12}, p_3 = \frac{19}{36},$$

$$\text{不满足 } \left(p_2 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(p_1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(p_3 + \frac{1}{2}\right),$$

$\frac{1}{2}$), 则 $\{p_n + \frac{1}{2}\}$ 不是等比数列, 故 C 错误;

对于 D, 由 C 项知, $p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{1}{4 \times 3^{n-1}}$, 则 $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \times 3^{n-1}}$,

所以数列 $\{p_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n}{2} +$

$\frac{3}{8}(1 - \frac{1}{3^n})$, 故 D 正确. 故选 ABD.

5. 【解】(1) 由题意得, 质点的初始位置为点 A, 点 A 不在底面 BCD 上.

p_1 : 移动 1 次后, 质点在底面 BCD 上. 从顶点 A 出发, 有 3 条棱, 分别通向点 B, C, D, 且这三个顶点都在底面 BCD 上, 故 $p_1 = 1$.

p_2 : 移动 2 次后, 质点在底面 BCD 上. 第 1 次移动后, 质点必在 B, C, D 三点之一, 且等可能性, 概率均为 $\frac{1}{3}$;

若第 1 次移动后到了点 B: 从点 B 出发, 有 3 条棱, 分别通向点 A, C, D, 其

中点 C, D 在底面 BCD 上, 点 A 不在底面 BCD 上, 所以从点 B 出发, 移动后

仍在底面 BCD 上的概率为 $\frac{2}{3}$,

同理, 若第 1 次移动后到了点 C 或 D, 移动后仍在底面 BCD 上的概率也为 $\frac{2}{3}$.

由全概率公式得 $p_2 = 3 \times (\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$.

(2) 由题意知, 移动 n 次后, 质点在底面 BCD 上的概率为 p_n , 则质点在顶点 A 处的概率为 $1 - p_n$.

若第 n 次移动后在底面 BCD 上, 此时从底面任意一点出发, 有 2 条棱通向底面另外两点, 1 条棱通向点 A, 故第 $n+1$ 次移动后在底面 BCD 上的概率为 $\frac{2}{3}$;

若第 n 次移动后在顶点 A 处, 此时从点 A 出发, 3 条棱都通向底面, 故第 $n+$

1 次移动后在底面 BCD 上的概率为 1.

由全概率公式得 $p_{n+1} = p_n \cdot \frac{2}{3} + (1 - p_n) \cdot 1 = \frac{2}{3}p_n + 1 - p_n = -\frac{1}{3}p_n + 1$,

令 $p_{n+1} - c = -\frac{1}{3}(p_n - c)$,

即 $p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{4}{3}c$,

得 $\frac{4}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$.

则 $p_{n+1} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}(p_n - \frac{3}{4})$,

所以数列 $\{p_n - \frac{3}{4}\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为公比的

等比数列, 又 $p_1 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$,

所以 $p_n - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{3})^{n-1}$, 得 $p_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}$.

专题 4 概率与导数的综合

刷难点

1. A 【解析】设 20 辆汽车中恰有 18 辆达到标准时的概率为 $f(p)$, 则 $f(p) = C_{20}^{18} p^{18} (1-p)^2$ ($0 < p < 1$), 则 $f'(p) = C_{20}^{18} p^{17} (1-p) (18-20p)$,

当 $p \in (0, 0.9)$ 时, $f'(p) > 0$, 所以 $f(p)$ 在 $(0, 0.9)$ 上单调递增; 当 $p \in (0.9, 1)$ 时, $f'(p) < 0$, 所以 $f(p)$ 在 $(0.9, 1)$ 上单调递减, 所以 $f(p)$ 在 $p = 0.9$ 处取得最大值, 即 $P(X \geq 500) = 0.9$.

又 $X \sim N(550, \sigma^2)$, 所以 $P(X \geq 600) = P(X \leq 500) = 1 - P(X \geq 500) = 1 - 0.9 = 0.1$,

即这款汽车的单次最大续航里程不低于 600 km 的概率为 0.1. 故选 A.

2. 【解】(1) 设小张同学在初赛的得分为 X , 则 $X \sim B(3, \frac{2}{3})$,

所以小张同学成功晋级复赛的概率为 $P(X=2) + P(X=3) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}$.

【巧思】也可利用 $1 - P(X=0) - P(X=1)$ 来求

(2) 设在复赛中每轮得分为 Y 分, 则 $Y \in \{0, 2, 4\}$, 则有 $P(Y=0) = (1-p) \times$

$(1-0.3) = \frac{7}{10}(1-p)$, $P(Y=2) = (1-p)$

$p) \times 0.3 + p(1-0.3) = \frac{3}{10} + \frac{2}{5}p$, $P(Y=$

$4) = p \times 0.3 = \frac{3}{10}p$.

(i) 若 $p = \frac{1}{2}$, 则 $P(Y=0) = \frac{7}{20}$, $P(Y=2) = \frac{1}{2}$, $P(Y=4) = \frac{3}{20}$.

若小张同学复赛总得分为 10 分, 则 2 轮 4 分, 1 轮 2 分,

所以小张同学复赛总得分为 10 分的概率 $P = C_3^1 \times \left(\frac{3}{20}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{27}{800}$.

(ii) 由题意可知 $f(p) = C_3^2 \times \frac{7}{10}(1-p) \times \left[1 - \frac{7}{10}(1-p)\right]^2 = \frac{21}{1000}(1-p)(3+7p)^2$, $0 < p < 1$,

则 $f'(p) = \frac{21}{1000}[-(3+7p)^2 + (1-p) \cdot 2(3+7p) \times 7] = \frac{21}{1000}(3+7p)(11-21p)$,

令 $f'(p) > 0$, 解得 $0 < p < \frac{11}{21}$;

令 $f'(p) < 0$, 解得 $\frac{11}{21} < p < 1$.

则 $f(p)$ 在 $(0, \frac{11}{21})$ 内单调递增, 在

$(\frac{11}{21}, 1)$ 内单调递减, 所以当 $p = \frac{11}{21}$ 时,

$f(p)$ 取到最大值, 且 $f(\frac{11}{21}) = \frac{4}{9}$.

3. 【解】(1) 这 4 个麦穗的位置从第 1 个到第 4 个排序, 全排列有 $A_4^4 = 24$ 种情况.

要摘到那个最大的麦穗, 分为以下两种情况:

①最大的麦穗是第 3 个, 其余麦穗任意排列, 有 $A_3^3 = 6$ 种情况;

②最大的麦穗是最后 1 个, 且第二大的麦穗是第 1 个或第 2 个, 其余麦穗任意排列, 有 $2A_2^2 = 2 \times 2 = 4$ 种情况.

所以 $P = \frac{6+4}{24} = \frac{5}{12}$.

(2) 设事件 A: 成功摘到最大麦穗; 事件 B_j : 最大麦穗出现在第 j 个位置.

最大麦穗出现在每个位置的概率均相等, 故 $P(B_j) = \frac{1}{n}$.

由全概率公式得 $P(A) = \sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(A|B_j)$.

当 $1 \leq j \leq k$ 时, 最大的麦穗落在前 k 个麦穗之中, 不会被摘到, 则 $P(A|B_j) = 0$;

当 $k+1 \leq j \leq n$ 时, 当且仅当前 $j-1$ 个麦穗中最大的麦穗在前 k 个麦穗中时, 能摘到最大麦穗, 此时 $P(A|B_j) = \frac{k}{j-1}$.

所以当 $n=10, k=7$ 时, $P(A) = \frac{1}{10} [P(A|B_8) + P(A|B_9) + P(A|B_{10})] = \frac{1}{10} \times \left(\frac{7}{7} + \frac{7}{8} + \frac{7}{9} \right) = \frac{191}{720}$,

又因为 $P(AB_8) = P(B_8) = \frac{1}{10}$,

所以 $P(B_8|A) = \frac{P(AB_8)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{191}{720}} = \frac{72}{191}$,

即所求概率为 $\frac{72}{191}$.

(3) 由(2)得, $P = P(A) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(A|B_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} = \frac{k}{n} \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} = \frac{k}{n} \ln \frac{n}{k}$.
因为 $k=tn (0 < t < 1)$, 所以 $P = t \ln \frac{1}{t}$.

令 $f(t) = t \ln \frac{1}{t} = -t \ln t, 0 < t < 1$,

所以 $f'(t) = -\ln t - 1$,

令 $f'(t) = 0$, 即 $-\ln t - 1 = 0$, 则 $t = \frac{1}{e}$.

当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, $f'(t) > 0$, 函数 $f(t)$ 在区

间 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递增;

当 $\frac{1}{e} < t < 1$ 时, $f'(t) < 0$, 函数 $f(t)$ 在区

间 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上单调递减.

所以 $f(t)_{\max} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$.

所以 P 的最大值为 $\frac{1}{e}$, 且 P 取最大值时 t 的值为 $\frac{1}{e}$.

第七章素养检测

刷速度

1. A 【解析】根据题意, 随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $P(X > 3) = 0.3$, 则 $P(1 < X < 3) = 2P(2 \leq X < 3) = 2(0.5 - P(X \geq 3)) = 2 \times 0.2 = 0.4$. 故选 A.

2. B 【解析】由题知, $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = 1$,

所以 $a=1$,

则 $E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 2$,

所以 $D(X) = \frac{1}{3} \times [(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2] = \frac{2}{3}$. 故选 B.

3. A 【解析】由题意知, 10 个数中, 1, 3, 5, 7, 9 为阳数, 2, 4, 6, 8, 10 为阴数. 若任取的 3 个数中有 0 个阴数, 则概率为 $\frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}$; 若任取的 3 个数中有 1 个

阴数, 则概率为 $\frac{C_5^2 \cdot C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{5}{12}$. 故这 3 个

数中至多有 1 个阴数的概率为 $P = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$. 故选 A.

4. C 【解析】由题意知 $X \sim B(6, 1-p)$, 若 $P(X=3) = P(X=4)$, 则 $C_6^3 (1-p)^3 p^3 = C_6^4 (1-p)^4 p^2$, 即 $20(1-p)^3 p^3 = 15(1-p)^4 p^2$, 解得 $p = \frac{3}{7}$.

设 Y 为 6 次操作中“直线操作”的次数, 则 $Y \sim B\left(6, \frac{3}{7}\right)$, 故期望为 $6 \times \frac{3}{7} = \frac{18}{7}$. 故选 C.

5. C 【解析】设事件 A = “具有性状 M”, B = “具有性状 N”, 则 AB = “具有性状

MN”.

根据题意可知, 具有性状 M 的个体中有 60% 具有性状 N, 则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.6 \Rightarrow P(A) = \frac{P(AB)}{0.6}$,

具有性状 N 的个体中有 40% 具有性状

M, 则 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0.4 \Rightarrow$

$P(B) = \frac{P(AB)}{0.4}$.

具有性状 mn (既无 M 也无 N) 的概率 $p = 0.43$, 因此 $P(A \cup B) = 1 - 0.43 = 0.57$.

又由 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

→ 避坑: 注意减去重合部分概率

得 $\frac{P(AB)}{0.6} + \frac{P(AB)}{0.4} - P(AB) = 0.57$,

化简得 $\frac{19}{6} P(AB) = 0.57$,

解得 $P(AB) = 0.18 = 18\%$.

因此样本中具有性状 MN 的占比为 18%. 故选 C.

6. C 【解析】由行驶里程在 $[350, 400)$ 内的频率为 0.34, 在 $[400, 450)$ 内的频率为 0.34, 说明数据在这两个区间的分布是对称的, 则 $\mu = 400$.

又在区间 $[350, 450)$ 内的频率为 $0.34 + 0.34 = 0.68$, 而 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, 故近似有 $\mu - \sigma = 350, \mu + \sigma = 450$, 解得 $\sigma = 50$.

认证比例 $2.28\% \approx \frac{1-0.9545}{2} \approx$

$P(X \geq \mu + 2\sigma)$, 所以 $m = \mu + 2\sigma = 400 + 100 = 500$, 因此最接近的选项是 C.

7. A 【解析】由题意, Y 服从二项分布 $B(n, p)$, 则 $P(Y=6) = C_n^6 p^6 (1-p)^{n-6}$, 要使 $P(Y=6)$ 最大,

则 $\begin{cases} C_n^6 p^6 (1-p)^{n-6} \geq C_{n-1}^6 p^6 (1-p)^{n-7}, \\ C_n^6 p^6 (1-p)^{n-6} \geq C_{n+1}^6 p^6 (1-p)^{n-5}, \end{cases}$

解得 $\frac{6}{p} - 1 \leq n \leq \frac{6}{p}$,

又 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以当 $\frac{6}{p}$ 为整数时, $n =$

$\frac{6}{p} - 1, E(Y) = \left(\frac{6}{p} - 1\right)p < 6$;

当 $\frac{6}{p}$ 不为整数时, $n < \frac{6}{p}, E(Y) = np < 6$,

故 $E(Y) < 6$. 故选 A.

8. A 【解析】设事件 A 为“抽奖者甲中奖”, 事件 B 为“甲最初选中的盲盒有奖”, 则 $P(B) = \frac{m}{n}$,

→ 悟: 由于甲最初选中的盲盒有奖与否会影响到 p_1 , 故需先分类讨论, 再结合全概率公式计算 p_1

在组织方拿走无奖的盲盒后, 若甲最初选中的盲盒有奖, 则剩余 $n-2$ 个盲盒中有 $m-1$ 个奖品,

甲更换盲盒后的中奖概率为 $P(A|$

$B) = \frac{m-1}{n-2}$;

若甲先选中的盲盒无奖, 则剩余 $n-2$ 个盲盒中有 m 个奖品, 则更换盲盒后

甲的中奖概率为 $P(A|\bar{B}) = \frac{m}{n-2}$, 因此

$p_1 = P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot$

$P(\bar{B}) = \frac{mn-m}{n^2-2n}$.

由乙碰掉的盲盒无奖, 可知 $n-1$ 个盲盒中有 m 个奖品, 且每个盲盒被抽到的可能性相同, 则 $p_2 = \frac{m}{n-1}$, 于是 $\frac{p_1}{p_2} =$

$\frac{(n-1)^2}{n^2-2n} = 1 + \frac{1}{n^2-2n} > 1$, 所以 $p_1 > p_2$. 故

选 A.

9. BCD 【解析】对于 A, 因为 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, 所以 $\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$, $\frac{1}{2}$, 所以 $P(B) = P(A) = \frac{1}{3}$, A 错误;

对于 B, 若随机变量 $X \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$, 则

$$D(X) = 6 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}, \text{B 正确};$$

对于 C, 根据方差的运算性质, 对任意常数 a, b , 有 $D(aX+b) = a^2 D(X)$, 本题中 $a=2, b=-1$, 因此 $D(Y) = D(2X-1) = 4D(X)$, C 正确;

对于 D, 由题意可得恰有两个盒子为空的放法种数为 $C_4^2 \times (2 \times C_4^3 + C_4^2) = 6 \times (8+6) = 84$, D 正确. 故选 BCD.

10. AC 【解析】由题可知, 总候选人数 $N=7$, 甲班候选人数 $M=3$, 抽取人数 $n=3$, X 为 3 名学生中来自甲班的人数,

所以 X 服从超几何分布, 且 X 可取 0, 1, 2, 3, 故 A 正确;

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}, P(X=1) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} =$$

$$\frac{18}{35}, P(X=2) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}, P(X=3) =$$

$$\frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}, \text{故 B 错误};$$

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{9}{7},$$

💡思: 也可以利用超几何分布期望公式 $E(X) = \frac{nM}{N} = \frac{9}{7}$

故 C 正确;

$$D(X) = \frac{4}{35} \times \left(0 - \frac{9}{7}\right)^2 + \frac{18}{35} \times \left(1 - \frac{9}{7}\right)^2 + \frac{12}{35} \times \left(2 - \frac{9}{7}\right)^2 + \frac{1}{35} \times \left(3 - \frac{9}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}, \text{D 错误. 故选 AC.}$$

11. ACD 【解析】设“甲同学今天早上骑共享单车出行”为事件 A_1 , “甲同学今天早上乘公交车出行”为事件 A_2 , “甲同学今天早上乘地铁出行”为事件 A_3 , “甲同学到达图书馆能立即找到空座位”的事件为 B .

对于 A, A_1 与 A_2 不能同时发生, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $P(A_2) = \frac{1}{2}, P(A_3) =$

$\frac{3}{10}$, 但 $P(A_2 A_3) = 0$, 所以 $P(A_2 A_3) \neq$

$P(A_2) \cdot P(A_3)$, 故 B 错误;

对于 C, 由 $P(A_1) = \frac{1}{5}, P(B|A_1) =$

$$\frac{17}{20}, P(A_2) = \frac{1}{2}, P(B|A_2) = \frac{7}{10},$$

$$P(A_3) = \frac{3}{10}, P(B|A_3) = \frac{19}{20},$$

由全概率公式得 $P(B) = P(A_1) \cdot$

$$P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) +$$

$$P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \frac{1}{5} \times \frac{17}{20} + \frac{1}{2} \times$$

$$\frac{7}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{19}{20} = \frac{161}{200} > \frac{4}{5}, \text{故 C 正确};$$

对于 D, 由题意可知所求概率为 $P(A_1|$

$$B) = \frac{P(BA_1)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} =$$

$$\frac{\frac{1}{5} \times \frac{17}{20}}{\frac{161}{200}} = \frac{34}{161}, \text{故 D 正确.}$$

故选 ACD.

12. $\frac{91}{36}$ 【解析】依题意, X 的可能取值为

1, 2, 3, 蝴蝶飞出情况总数为 $6^3 = 216$.

其中 $X=1$: 三次飞出同一只蝴蝶, 可能的情况有 6 种,

$$\text{故 } P(X=1) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

$X=2$: 三次恰好飞出两只不同蝴蝶(即一只飞出两次, 另一只飞出一),

选取飞出两次的蝴蝶有 6 种可能, 选取飞出一只的蝴蝶有 5 种可能,

其中飞出一只的蝴蝶的位置有 3 种可能, 故事件 $X=2$ 的可能情况有 $6 \times 5 \times 3 = 90$ 种,

$$\text{故 } P(X=2) = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}.$$

$X=3$: 三次飞出三只不同蝴蝶,

则事件 $X=3$ 的可能情况有 $6 \times 5 \times 4 = 120$ 种,

$$\text{故 } P(X=3) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}.$$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times$$

$$\frac{5}{9} = \frac{1+30+60}{36} = \frac{91}{36}.$$

13. 112 【解析】设应聘者答对 x 道笔试题备选题和 y 道面试题备选题的概率分别为 $P(x), P(y)$,

$$\text{易知 } P(x) = C_{10}^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{10-x} =$$

$$C_{10}^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-x}, x \in \mathbf{N}^*,$$

💡思: 可考虑通过作商的方法得到 $P(x)$ 的单调性, 即比较 $\frac{P(x+1)}{P(x)}$ 与 1 的大小

$$P(y) = C_{10}^y \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-y} =$$

$$C_{10}^y \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, y \in \mathbf{N}^*. \text{ 为使 } P(x) \text{ 取}$$

得最大值, x 满足

$$\begin{cases} C_{10}^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-x} \geq C_{10}^{x+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-x}, \\ C_{10}^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-x} \geq C_{10}^{x-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11-x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{19}{3} \leq x \leq \frac{22}{3}, \text{ 又 } x \in \mathbf{N}^*, \text{ 则 } x=7.$$

易知 $y=5$ 时, $P(y)$ 最大,

所以甲得 $(7+5) \times 10 - (10-7+10-5) \times 1 = 112$ (分) 的概率最大.

$$14. \frac{2}{5} \left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right]$$

思路导引 记事件 $A_n: n(n \in \mathbf{N}^*)$

次传球后球在甲手中, 设 $P(A_n) = P_n$, 利用全概率公式可得出 $P_{n+1} =$

$$-\frac{2}{3} P_n + \frac{2}{3}, \text{ 分析可知, 数列}$$

$\left\{P_n - \frac{2}{5}\right\}$ 为等比数列, 确定该数列的首项和公比, 即可求出 P_n .

【解析】 记事件 $A_n: n(n \in \mathbf{N}^*)$ 次传球后球在甲手中, 设 $P(A_n) = P_n$,

由题意可得 $P(A_{n+1}|A_n) = 0, P(A_{n+1}|\overline{A_n}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, 由全概率

公式可得 $P(A_{n+1}) = P(A_n)P(A_{n+1}|A_n) + P(\overline{A_n})P(A_{n+1}|\overline{A_n})$, 即 $P_{n+1} = P_n \times$

$$0 + (1 - P_n) \times \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} P_n + \frac{2}{3}, \text{ 且 } P_1 =$$

$$0, \text{ 所以 } P_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{2}{3} \left(P_n - \frac{2}{5}\right), \text{ 所}$$

以数列 $\left\{P_n - \frac{2}{5}\right\}$ 是以 $P_1 - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$

为首项, $-\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列, 即

$$P_n - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \text{ 故 } P_n =$$

$$\frac{2}{5} \left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right].$$

15. 【解】 (1) 设“选出的 2 人来自不同家

庭”为事件 C , 则 $P(C) = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{5}$.

(2) 设“选出的第 1 个人来自 A 家庭的条件下, 第 2 个人也来自 A 家庭”

$$\text{为事件 } D, \text{ 则 } P(D) = \frac{1 - P(C)}{\frac{2}{C_3^1}} = \frac{2}{5}.$$

(3)由(1)知,选出的2人来自不同家庭的概率为0.6,所以选出的2人来自同一家庭的概率为0.4.由全概率公式可知,最终游戏获胜的概率为 $0.4 \times 0.6 + 0.6 \times 0.3 = 0.42$.

16.【解】(1)设甲市本次模拟考试成绩 X 近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.

由题意得 $\mu = 65$.

$$\text{因为 } \frac{228}{10\,000} = 0.022\,8,$$

$$\text{又 } \frac{1 - P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)}{2} \approx 0.022\,8.$$

$$\text{即 } P(X > \mu + 2\sigma) \approx 0.022\,8,$$

$$\text{所以 } \mu + 2\sigma = 87, \text{ 解得 } \sigma = 11.$$

因为甲市学生A的成绩为76分,且 $76 = \mu + \sigma$,

$$\text{又 } \frac{1 - P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)}{2} \approx 0.158\,7,$$

$$\text{即 } P(X > \mu + \sigma) \approx 0.158\,7,$$

所以学生A在甲市的大致名次为1587名.

(2)在参加本次模拟考试的学生中,抽取1名化学成绩在 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 之外的学生的概率为0.9974.

所以抽取1名化学成绩在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的学生的概率为0.0026.

所以随机变量 Y 服从二项分布,即 $Y \sim B(40, 0.002\,6)$,

$$\text{所以 } P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0.997\,4^{40} \approx 0.098\,9.$$

17.【解】(1)设 A_1 表示“甲球员担任边锋”, A_2 表示“甲球员担任前卫”, A_3 表示“甲球员担任中场”, B 表示“球队获胜”,

$$\begin{aligned} \text{则 } P(B) &= P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= 0.2 \times 0.5 + 0.5 \times 0.6 + 0.3 \times 0.8 = 0.64, \\ \therefore \text{当甲出场比赛时,球队获胜的概率为 } 0.64. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 由 (1) 知 } P(B) &= 0.64, \therefore P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} \\ &= \frac{0.5 \times 0.6}{0.64} = \frac{15}{32}, \end{aligned}$$

$\therefore$ 在球队获胜的条件下,球员甲担任前卫的概率为 $\frac{15}{32}$.

(3)要安排甲在球场上的位置,需要考虑甲出场且球队获胜的情况下,甲担任边锋、前卫、中场的概率,

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{0.2 \times 0.5}{0.64} = \frac{5}{32},$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{0.3 \times 0.8}{0.64} = \frac{3}{8},$$

由于 $P(A_2|B) > P(A_3|B) > P(A_1|B)$,
 $\therefore$ 应多安排甲球员担任前卫,来增大球队获胜的概率.

18.【解】(1)由题意可知, ξ 的所有可能取值为0,1,2,3,

$$P(\xi=0) = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{7}{44},$$

$$P(\xi=1) = \frac{C_7^2 C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{21}{44},$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_7^1 C_5^2}{C_{12}^3} = \frac{7}{22},$$

$$P(\xi=3) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22},$$

所以随机变量 ξ 的分布列如表所示:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

$$\text{所以 } E(\xi) = 0 \times \frac{7}{44} + 1 \times \frac{21}{44} + 2 \times \frac{7}{22} + 3 \times \frac{1}{22} = \frac{5}{4}.$$

$$\frac{1}{22} = \frac{5}{4}.$$

(2)设甲、乙两人在一轮竞赛中总共答对的题数为随机变量 Y ,

由题意可知,每人答2题,两人共答

4题,每道题答对的概率均为 $\frac{2}{3}$,且

各题答对与否相互独立,

因此 Y 服从二项分布 $B(4, \frac{2}{3})$.

则他们在每轮答题中取得胜利的概率为 $P(Y \geq 3) = C_4^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^1 +$

$$C_4^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^0 = \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{16}{27}.$$

设他们小组在 n 轮答题中取得胜利的次数为 X ,

$$\text{则 } X \sim B\left(n, \frac{16}{27}\right), E(X) = \frac{16}{27}n,$$

$$\text{由 } E(X) \geq 6, \text{ 即 } \frac{16}{27}n \geq 6, \text{ 解得 } n \geq 10.125,$$

而 $n \in \mathbf{N}^*$,则 $n_{\min} = 11$,所以理论上至少要进行11轮答题.

名师点拨 判断随机变量是否服从二项分布需要注意两点:一是要看一次试验中是否只有两种试验结果,且两种试验结果发生的概率分别为 $p, 1-p$;二是看是否为 n 次独立重复试验,且随机变量是否为某事件在这 n 次独立重复试验中发生的次数.

19.【解】(1)由题意知, X 的所有可能取值为0,1,2,

$$\text{且 } P(X=0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25},$$

$$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{25},$$

$$P(X=2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{9}{25}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{2}{25} + 1 \times \frac{14}{25} + 2 \times \frac{9}{25} = \frac{32}{25}.$$

$$\frac{9}{25} = \frac{32}{25}.$$

(2)(i)由题意知 $P_1 = 0, P_2 = \frac{2}{5} \times$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{25}.$$

当 $n \geq 3$ 时, n 次操作后游戏终止分两种情形:

①第1次摸出的是黑球,则还需 $n-1$ 次操作游戏才能终止,则 $P_n = \frac{3}{5}P_{n-1}$;

点拨: P_{n-1} 指 $n-1$ 次操作后盒子中全为黑球,游戏终止,再乘第1次摸出黑球的概率 $\frac{3}{5}$,即为此情形下 n 次操作后游戏终止的概率

②第1次摸出的是红球,则剩下 $n-1$ 次摸球中,最后1次摸出红球,中间 $n-2$ 次摸出的都是黑球,则 $P_n = \frac{2}{5} \times$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2},$$

$$\text{所以 } P_n = \frac{3}{5}P_{n-1} + \frac{2}{25} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2},$$

$$\text{即当 } n \geq 3 \text{ 时, } P_n - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n =$$

$$\frac{3}{5} \left[P_{n-1} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \right].$$

$$\text{又因为 } P_1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 = -\frac{2}{5}, P_2 -$$

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \left[P_1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 \right],$$

$$\text{所以数列 } \left\{ P_n - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\} \text{ 是以 } -\frac{2}{5}$$

为首项, $\frac{3}{5}$ 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } P_n - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n = -\frac{2}{5} \times$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1},$$

$$\text{即 } P_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

(ii)当 $n \geq 2$ 时, $P_n - P_{n-1} = \frac{1}{2} \times$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} -$$

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \right] = \frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{4}{5}\right)^n -$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \right] - \frac{2}{3} \times \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n -$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \Bigg] = \frac{4}{15} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{1}{10} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

$$\text{令 } P_n - P_{n-1} > 0, \text{ 得 } \frac{4}{15} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{1}{10} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} > 0,$$

两边同时乘 $30 \times 5^{n-1}$ 得 $8 \times 3^{n-1} - 3 \times$

$$4^{n-1} > 0, \text{ 所以 } \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} > \frac{3}{8}, \text{ 即}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} > \frac{1}{2},$$

当 $n=2, 3, 4$ 时, 上述不等式成立, 故 $P_4 > P_3 > P_2 > P_1$,

$$\text{当 } n=5 \text{ 时, } \left(\frac{3}{4}\right)^{5-2} < \frac{1}{2},$$

因为 $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ 是减函数, 所以当

$$n \geq 5 \text{ 时, } \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} < \frac{1}{2} \text{ 恒成立, 故 } P_4 >$$

$$P_5 > P_6 > \cdots,$$

所以 P_4 最大, 即 P_n 的最大值为 $P_4 =$

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{74}{625}.$$

第七章高考强化

刷真题

1. A 【解析】从该地的中学生中任取一名学生, 记 A 表示事件: “取到的学生爱好滑冰”, B 表示事件: “取到的学生爱好滑雪”. 由题设知 $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.7$, 由 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 得 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.7 = 0.4$.

故所求的概率为 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$. 故选 A.

2. $\frac{8}{27}$ $\frac{37}{64}$ 【解析】设“三次都没取到黄球”为事件 A , “至少取到一次红球”为事件 B , 则 $P(A) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

事件 A, B 同时发生意味着至少取到一次红球, 且剩余次数均取到白球,

$$\text{故 } P(AB) = C_3^1 \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 + C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} + C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{37}{216},$$

【陷阱】若考虑对立面, 不可以直接用 $1 - \left(\frac{3}{6}\right)^3$, 还需要考虑没取到黄球的概率

$$\text{故 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{37}{216}}{\frac{8}{27}} = \frac{37}{64}.$$

3. (1) 【解】当 $N=4, p=\frac{1}{3}$ 时, 依题意, 该同学停止练习的情况有: 投中 1 次; 4 次均未投中. 因此, 该同学停止练习时的投篮次数 X 的可能取值为 1, 2, 3, 4. 当 $X=1$ 时, 该同学第 1 次投中, 概率为 $P(X=1) = p = \frac{1}{3}$;

当 $X=2$ 时, 该同学第 1 次未投中, 且第 2 次投中, 概率为 $P(X=2) = (1-p) \cdot p = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$;

当 $X=3$ 时, 该同学前 2 次均未投中, 且第 3 次投中, 概率为 $P(X=3) = (1-p)^2 p = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$;

当 $X=4$ 时, 该同学前 3 次均未投中, 概率为 $P(X=4) = (1-p)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

【陷阱】第 4 次无论投中与否都会停止练习

所以 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

(2) (i) 【解】当 $k=0$ 时, $P(X>k) = P(X>0) = 1$.

当 $1 \leq k \leq N-1$ 时, 因为所求概率对应的事件为该同学停止练习时的投篮次数大于 k , 且该同学前 k 次均未投中不会因投篮次数达上限而被强制停止练习, 所以 $P(X>k) = (1-p)^k$.

又 $k=0$ 时, 符合上式, 故当 $k \leq N-1$ 时, $P(X>k) = (1-p)^k$.

(ii) 【证明】由于 m 是自然数, 则 $k+m \geq k$, 故 $\{X|X>k+m\} \cap \{X|X>k\} = \{X|X>k+m\}$, 因此由条件概率公式得

$$P(X>k+m|X>k) = \frac{P(X>k+m)}{P(X>k)}.$$

由 (i) 可知, 当 $k+m \leq N-1$ 时, $P(X>k+m) = (1-p)^{k+m}$, $P(X>k) = (1-p)^k$, 所以 $P(X>k+m|X>k) = \frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k} = (1-p)^m$.

易知 $P(X>m) = (1-p)^m$, 所以 $P(X>k+m|X>k) = P(X>m)$.

4. 【解】(1) 第 2 次投篮的人是乙分两种情况:

第 1 次投篮的人是甲且投篮未命中, 其概率为 $0.5 \times (1-0.6) = 0.2$;

第 1 次投篮的人是乙且投篮命中, 其概率为 $0.5 \times 0.8 = 0.4$,

所以第 2 次投篮的人是乙的概率为 $0.2 + 0.4 = 0.6$.

(2) 记第 i 次投篮的人是甲的概率是 p_i , 则第 i 次乙投篮的概率是 $1-p_i$, 其中 $p_1 = 0.5$.

接下来分析第 $i+1$ 次投篮的人是甲的概率, 分两种情况:

①第 i 次为甲投篮的概率为 p_i , 投中的概率为 0.6, 则第 $i+1$ 次还是甲投篮;

②第 i 次为乙投篮的概率为 $1-p_i$, 没有投中的概率为 0.2, 则第 $i+1$ 次是甲投篮,

所以 $p_{i+1} = p_i \times 0.6 + (1-p_i) \times 0.2 = 0.2 +$

$$0.4p_i, \text{ 变形得 } p_{i+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \left(p_i - \frac{1}{3}\right).$$

又 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 所以数列 $\left\{p_i - \frac{1}{3}\right\}$ 是首

项为 $\frac{1}{6}$, 公比为 $\frac{2}{5}$ 的等比数列,

所以 $p_i - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$, 化简得

$$p_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}, i \in \mathbf{N}^*.$$

(3) 设第 i 次投篮时甲投篮的次数为 X_i , 则 X_i 的可能取值为 0 或 1, 当 $X_i = 0$ 时, 表示第 i 次投篮的人是乙, 当 $X_i = 1$ 时, 表示第 i 次投篮的人是甲, 所以 $P(X_i = 1) = p_i$, $P(X_i = 0) = 1-p_i$, 所以 $E(X_i) = p_i$.

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n,$$

则 $E(Y) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$,

$$\text{由 (2) 知, } p_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1},$$

所以 $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \times \left[1 +$

$$\frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right] = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \times$$

$$\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{n}{3} + \frac{5}{18} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right].$$

5. A

思路引导 思路一: 列出 X 的所有可能取值 → 利用对称性设出各个取值对应的概率 → 数学期望;

思路二: 分析坐标取值集合的对称性 → 整体求和得出全集 U 中所有点的坐标之和为 0 → 剔除样本点 P 得到 Ω 中所有点的坐标之和 → 利用算术平均值求出 $E(X)$

【解析】由题知 $X(A) = x_1 + x_2 + x_3$, 则 X 的所有可能取值为 $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$,

由对称性可得相应概率为 $\frac{k_1}{63}, \frac{k_2}{63}, \frac{k_3}{63}$,

$$\frac{k_4}{63}, \frac{k_5}{63}, \frac{k_6}{63}, \frac{k_7}{63}, \frac{k_6}{63}, \frac{k_5}{63}, \frac{k_4-1}{63}, \frac{k_3}{63}, \frac{k_2}{63},$$

【点悟】需要去掉点 $(1,1,1)$

$$\frac{k_1}{63} (k_i \in \mathbf{N}^*, i = 1, 2, 3, \dots, 7), \text{ 则}$$

$$E(X) = 0 - \frac{3}{63} = -\frac{1}{21}, \text{ 故选 A.}$$

多种解法 由题意, 集合 U 中包含的点的总数为 64.

由集合 $\{-2, -1, 1, 2\}$ 可知 U 中所有点的坐标之和为 0.

点 $P(1, 1, 1)$ 的坐标之和为 $1+1+1=3$, 样本空间 $\Omega = \{P\}$ 共包含 $64-1=63$ (个) 点, 故 Ω 中所有点的坐标之和为

$$\sum_{A \in \Omega} X(A) = 0 - 3 = -3, \text{ 则 } X \text{ 的数学期}$$

$$\text{望 } E(X) = \frac{-3}{63} = -\frac{1}{21}.$$

归纳总结 求解离散型随机变量的数学期望时, 若样本空间具有规律 (如对称性), 可跳过烦琐且易错的分布列求解步骤, 直接利用“期望 = 样本空间对应取值总和/样本点总数”这一宏观性质进行整体求解.

6. $\frac{61}{25}$ 【解析】由题意得 $X=1, 2, 3$.

【敲黑板】 $X=1$ 表示三次取出的都是同一个数字的球, $X=2$ 表示三次取出了两个不同数字的球, $X=3$ 表示三次取出的球的数字各不相同

$$P(X=1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{5}{125}; P(X=$$

$$3) = A_5^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{60}{125}; P(X=2) = C_5^2 \times$$

$$2 \times \frac{A_3^3}{A_2^2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{60}{125}.$$

【点悟】假设所取球的数字为 1 和 2, 式中“2”表示两种组合“1, 1, 2”和“1, 2, 2”, “ $\frac{A_3^3}{A_2^2}$ ”表示“除序”

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{5}{125} + 2 \times \frac{60}{125} + 3 \times$$

$$\frac{60}{125} = \frac{61}{25}.$$

多种解法

令 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{球 } i \text{ 至少被取出一次,} \\ 0, & \text{球 } i \text{ 没被取出过,} \end{cases}$ 则

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5,$$

$$E(X_i) = P(\text{球 } i \text{ 至少被取出一次}) = 1 - P(\text{球 } i \text{ 没被取出过}) = 1 -$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125}.$$

$$\text{故 } E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) +$$

$$E(X_4) + E(X_5) = 5 \times \frac{61}{125} = \frac{61}{25}.$$

7. 【解】(1) 从甲校抽取的 100 人中, 有 80 人答对, 用频率估计概率, 估计甲校高一年级学生该题选择正确的概率

$$p = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}.$$

(2) 由题知, X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 从乙校随机抽取 1 人, 答对该题目的概率

$$p' = \frac{75}{100} = \frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } P(X=0) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times$$

$$\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{20},$$

$$P(X=1) = \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times$$

$$\frac{3}{4} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{20},$$

$$P(X=2) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{7}{20} + 2 \times \frac{3}{5} = \frac{31}{20},$$

即 $X=1$ 的概率为 $\frac{7}{20}$, X 的数学期望

$$\text{为 } \frac{31}{20}.$$

(3) 该题做对分两种情况, 一种是掌握知识点并做对, 另一种是没有掌握但随机选一个对了, 所以 $p_1 \times 100\% + (1 -$

$$p_1) \times \frac{1}{4} = \frac{4}{5},$$

$$p_2 \times 85\% + (1 - p_2) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\text{解得 } p_1 = \frac{11}{15}, p_2 = \frac{5}{6}, \text{ 所以 } p_2 > p_1.$$

8. ①0.6 ②3.2 【解析】①小桐一周跑 11 圈有两种情况: 第一次跑 5 圈、第二次跑 6 圈和第一次跑 6 圈、第二次跑 5 圈, 两种情况的概率分别为 $P_1 = 0.5 \times 0.6 = 0.3$, $P_2 = 0.5 \times 0.6 = 0.3$, 所以小桐一周跑 11 圈的概率 $P = P_1 + P_2 = 0.3 + 0.3 = 0.6$.

②小桐一周跑的圈数的所有可能取值为 10, 11, 12, 其中达标的圈数为 11, 12, 则小桐一周内运动量达标的概率 $P = 1 - 0.5 \times 0.4 = 0.8$. 合格周数 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, X 服从二项分布 $B(4, 0.8)$, 所以 X 的数学期望 $E(X) = 4 \times 0.8 = 3.2$.

规律方法 若随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, 则 X 的数学期望 $E(X) = np$, 方差 $D(X) = np(1-p)$.

9. 【解】(1) 因为首次出现故障时间在 365 天以内的电子产品所占比例为 $5\% + 10\% = 15\%$,

在 375 天以内的电子产品所占比例为 $15\% + 20\% = 35\%$, 在 385 天以内的电子产品所占比例为 $35\% + 25\% = 60\%$, 所以第一四分位数, 即 25% 分位数一定位于 $(365, 375)$ 内, 中位数一定位于 $(375, 385)$ 内.

设第一四分位数为 x , 则 $0.02(x - 365) + 0.15 = 0.25$,

解得 $x = 370$, 即第一四分位数为 370.

设中位数为 m , 则 $0.025(m - 375) + 0.35 = 0.5$, 解得 $m = 381$, 即中位数为 381.

$$(2) (i) \hat{p} = (0.005 + 0.01) \times 10 = 0.15.$$

(ii) 由 (i) 知 $X \sim B(100, 0.15)$,

$$\text{则 } E(X) = 100 \times 0.15 = 15,$$

$$D(X) = 100 \times 0.15 \times (1 - 0.15) = 12.75.$$

链接教材 本题是教材第 76 页探究的变式与延伸, 考查二项分布的均值、方差与频率分布直方图的综合应用. 常通过统计图表求出频率, 用频率估计概率, 进而将估计的概率作为二项分布模型的参数 p , 再利用二项分布的均值公式和方差公式求解相关问题.

10. (1) 【解】设事件 A : 打完 3 个球后, 甲比乙多得 3 分, 即甲赢了 3 个球, 则 $P(A) = p^3$, 则 $p_3 = p^3$.

设事件 B : 打完 4 个球后, 甲比乙多得 2 分, 即甲赢了 3 个球, 输了 1 个球, 则 $P(B) = C_4^3 p^3 (1-p)$,

设事件 C : 打完 4 个球后, 甲比乙多得 4 分, 即甲赢了 4 个球, 则 $P(C) = p^4$.

$$\text{则 } p_4 = P(B) + P(C) = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p).$$

$$(2) 【解】 \text{易知 } q_4 = 4(1-p)^3 p + (1-p)^4 = (1-p)^3(3p+1), q_3 = (1-p)^3,$$

$$\text{因此 } \frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = \frac{3p^3(1-p)}{3p(1-p)^3} = \frac{p^2}{(1-p)^2} = 4,$$

$$\text{解得 } p = 2(\text{舍去}) \text{ 或 } p = \frac{2}{3}.$$

(3) 【证明】易知 $p_{2m+2} = p_{2m+1} + pC_{2m+1}^{m+1} p^{m+1} \cdot (1-p)^m$,

$$q_{2m+2} = q_{2m+1} + qC_{2m+1}^{m+1} q^{m+1} p^m,$$

$$p_{2m+1} = p_{2m} - (1-p)C_{2m}^{m+1} p^{m+1} (1-p)^{m-1},$$

$$q_{2m+1} = q_{2m} - pC_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^{m-1},$$

$$\text{则 } \frac{p_{2m+1} - p_{2m}}{q_{2m+1} - q_{2m}} = \frac{-C_{2m}^{m+1} (1-p)^m p^{m+1}}{-C_{2m}^{m+1} (1-p)^{m+1} p^m} =$$

$$\frac{p}{1-p} > 1,$$

$$\text{则 } p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m},$$

$$\text{即 } p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}.$$

$$(p_{2m+2} - p_{2m}) - (q_{2m+2} - q_{2m})$$

$$\begin{aligned}
&= C_{2m+1}^{m+2} p^{m+2} q^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m - (C_{2m+1}^{m+2} q^{m+2} p^m - C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^m) \\
&= C_{2m+1}^{m+2} p^{m+2} q^m - C_{2m+1}^{m+2} q^{m+2} p^m - (C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m - C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^m) \\
&= C_{2m+1}^{m+2} p^m q^m (p^2 - q^2) - C_{2m}^{m+1} p^m q^m (p - q) \\
&= C_{2m+1}^{m+2} p^m q^m (p - q) - C_{2m}^{m+1} p^m q^m (p - q) \\
&= p^m q^m (p - q) (C_{2m+1}^{m+2} - C_{2m}^{m+1}) > 0, \\
&\text{因此 } p_{2m+2} - p_{2m} > q_{2m+2} - q_{2m}, \\
&\text{即 } p_{2m+2} - q_{2m+2} > p_{2m} - q_{2m}. \\
&\text{综上, } p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}.
\end{aligned}$$

多种解法 (3) 先考虑 p_{2m+1} 与 p_{2m} 的关系, 令 X_n 表示打 n 个球后甲的得分, 则若打 $2m$ 个球后有 $X_{2m} \geq m+2$, 那无论如何都会有 $X_{2m+1} \geq m+2$; 如果 $X_{2m} = m+1$, 那么需要最后一个球甲得分, 才能使得 $X_{2m+1} \geq m+2$; 如果 $X_{2m} < m+1$, 那无论如何都不能得到 $X_{2m+1} \geq m+2$, 因此 $p_{2m+1} = P(X_{2m+1} \geq m+2) = P(X_{2m+1} \geq m+2 | X_{2m} \geq m+2) \cdot P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m+1} \geq m+2 | X_{2m} = m+1) \cdot P(X_{2m} = m+1) = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m+1) \cdot p = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m+1) - P(X_{2m} = m+1)q = p_{2m} - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m$, 同理有 $q_{2m+1} = q_{2m} - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m$, $p_{2m+1} - q_{2m+1} = p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m = p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^{m+1} \cdot (pq)^m (q - p) < p_{2m} - q_{2m}$.

先考虑 p_{2m+2} 与 p_{2m} 的关系, 当已经有 $X_{2m} \geq m+2$ 时, 无论如何都会有 $X_{2m+2} \geq m+2$; 当 $X_{2m} = m+1$ 时, 只要保证接下来甲不连输两球即可; 当 $X_{2m} = m$ 时, 接下来甲必须赢两球; 当 $X_{2m} < m$ 时, 无论如何都不符合要求, 因此 $p_{2m+2} = P(X_{2m+2} \geq m+2) = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m) p^2 + P(X_{2m} = m+1) [1 - (1-p)^2] = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m) + P(X_{2m} = m+1) + (p^2 - 1) P(X_{2m} = m) - (1-p)^2 P(X_{2m} = m+1) = P(X_{2m} \geq m) + (p^2 - 1) \cdot C_{2m}^m p^m q^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m+1} = p_{2m} + P(X_{2m} = m) + (p^2 - 1) C_{2m}^m p^m q^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m+1}$, 同理 $q_{2m+2} = q_{2m} + P(X_{2m} = m) + (q^2 - 1) \cdot C_{2m}^m q^m p^m - C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^{m+1}$, 因此 $p_{2m+2} - q_{2m+2} = p_{2m} - q_{2m} + (p^2 - q^2) \cdot C_{2m}^m p^m q^m > p_{2m} - q_{2m}$. 综上, $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$.

11. D 【解析】对于 A, σ 越小, 代表正态曲线越陡, 故 A 正确; 对于 B, 测量结果服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$, 则正态曲线的对称轴为直线 $x=10$, 故 B 正确; 对于 C, 结合正态曲线可知 $x=10.01$ 与 $x=9.99$ 关于对称轴 (直线 $x=10$) 对称, 故 C 正确; 对于 D, 结合正态曲线可知, 区间 $(9.9, 10.2)$ 与 $(10, 10.3)$ 不关于对称轴 (直线 $x=10$) 对称, 故 D 错误. 故选 D.

12. BC 【解析】由题可得 $X \sim N(1.8, 0.1^2)$, $Y \sim N(2.1, 0.1^2)$, 所以 $P(X > 2) = P(X > \mu + 2\sigma) < P(X > \mu + \sigma) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587 < 0.2$, 故 A 错误, B 正确; $P(Y > 2) = P(Y > \mu_1 - \sigma_1) \approx 0.8413 > 0.5$, 故 C 正确, D 错误. 故选 BC.

13. 0.14 【解析】因为 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 所以 $P(X > 2) = 0.5$, 所以 $P(X > 2.5) = P(X > 2) - P(2 < X \leq 2.5) = 0.5 - 0.36 = 0.14$.

刷原创

1. B 【解析】由条件概率公式知, $P((A_1 + A_2) | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$ 变形可得 $\frac{P((A_1 + A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 B)}{P(B)}$, 即 $P((A_1 + A_2)B) = P(A_1 B) + P(A_2 B)$, 故 $P(A_1 B + A_2 B) = P(A_1 B) + P(A_2 B)$, 因此 $P((A_1 B) \cap (A_2 B)) = 0$, 故选 B.

2. D 【解析】记事件“ $I(I=A, B, C, D)$ 骰子掷出点数 $i(i=0, 1, 2, \dots, 6)$ ”为 I_i , 事件“乙选骰子 I , 且获胜”为“ $I > A$ ”. 因为两人掷出的点数相互独立, 所以由全概率公式, 得 $P(B > A) = P(B_3 | A_0) \cdot P(A_0) = 1 \times \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(C > A) = P((C_2 + C_6) | A_0) \cdot P(A_0) + P(C_6 | A_4) \cdot P(A_4) = 1 \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$, $P(D > A) = P((D_1 + D_5) | A_0) \cdot P(A_0) + P(D_5 | A_4) \cdot P(A_4) = 1 \times \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, 故由 $\frac{1}{3} < \frac{5}{9} < \frac{2}{3}$ 知, 乙选择骰子 D 获胜的可能性最大.

3. 【解】 (1) Z 所有可能的取值为 $0, 1, 2, \dots, 20$, 则 $Z \sim B\left(20, \frac{1}{3}\right)$, $E(Z) = \frac{20}{3}$. (2) 设使用方法 A 的样本数为 n , 成功的次数为 X , 使用方法 B 的样本数为 $50-n$, 成功的样本数为 Y . X 所有可能的取值为 $0, 1, 2, \dots, n$, 则 $X \sim B\left(n, \frac{1}{3}\right)$, $E(X) = \frac{n}{3}$; Y 所有可能的取值为 $0, 1, 2, \dots, 50-n$, 则 $Y \sim B\left(50-n, \frac{1}{4}\right)$, $E(Y) = \frac{50-n}{4}$, 所以 $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{n}{3} + \frac{50-n}{4} = \frac{n+150}{12} \geq 15$, 解得 $n \geq 30$. 所以在实验有效的条件下使用方法 A 的样本数至少为 30.

4. 【解】 (1) $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. 依题意, X 的可能取值为 $-1, 0, 1$, $P(X=-1) = P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$, $P(X=0) = P(AB + \bar{A}\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$, $P(X=1) = P(A\bar{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, 所以 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

所以 $E(X) = -\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. (2) 若乙队得 0 分, 则甲队得 2 分, 且第 4 轮甲队得分, 其概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times C_3^1 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{768}$; 若乙队得 1 分, 则甲队得 3 分, 且第 4 轮甲队得分, 乙队不得分, 前 3 轮中不出现甲在前 2 轮得 2 分, 乙在第 3 轮得分, 其概率为 $(C_3^2 C_3^1 - 1) \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{48}$; 若乙队得 2 分, 则甲队得 4 分, 且第 4 轮甲队得分, 乙队不得分, 其概率为 $C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3}{64}$, 所以恰好在第 4 轮对抗后比赛结束且甲队获胜的概率为 $\frac{1}{768} + \frac{1}{48} + \frac{3}{64} = \frac{53}{768}$.